Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Une étude statistique sur la population d'acheteurs a montré que :

- 90 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en utilisant internet affirment vouloir continuer à utiliser internet pour faire le suivant. Les autres personnes comptent faire leur prochain achat en magasin ;
- 60 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en magasin affirment vouloir continuer à effectuer le suivant en magasin. Les autres comptent effectuer leur prochain achat en utilisant internet.

Dans la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. Une personne est choisie au hasard parmi les acheteurs. On note :

- a_n la probabilité que cette personne fasse son $n^{\text{ième}}$ achat sur internet ;
- b_n la probabilité que cette personne fasse son $n^{\text{ième}}$ achat en magasin.

On suppose de plus que $a_1=1$ et $b_1=0$.

On note $P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ l'état probabiliste correspondant au $n^{\text{ième}}$ achat. Ainsi $P_1=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.

On note :

- A l'état : « La personne effectue son achat sur internet » ;
- B l'état : « La personne effectue son achat en magasin ».

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Ecrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

3.a. Calculer la matrice M^4 .

b. En déduire que la probabilité que la personne interrogée fasse son $5^{\text{ème}}$ achat sur internet est égale à 0,8125.

4. on note : $P=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe

a. Montrer que les nombres a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} 0{,}1\,a-0{,}4\,b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$$

b. Résoudre le système précédent.

c. A long terme, quelle est la probabilité que cette personne fasse ses achats sur internet ?

5.a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_{n+1}=0{,}5\,a_n+0{,}4$$

b. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n \leqslant 0{,}801$

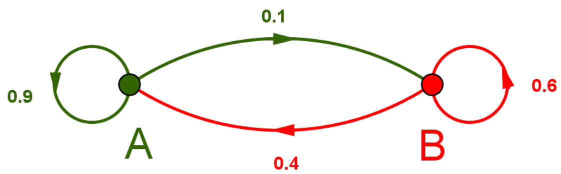
```
Variables :        N est un entier naturel
                   A est un nombre réel
Initialisation :   Affecter à N la valeur 1
                   Affecter à A la valeur 1
Traitement :       Tant que . . . .
                       Affecter à A la valeur 0,5xA+0,4
                       Affecter à N la valeur . . . .
                   Fin Tant que
Sortie :           Afficher N
```

c. Quelle est valeur affichée par l'algorithme en sortie ?

CORRECTION

1. L'arbre probabiliste admet deux sommets : A et B

- « 90 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en utilisant internet affirment vouloir continuer à utiliser internet pour faire le suivant. Les autres personnes (soit 10%) comptent faire leur prochain achat en magasin ».
  Le poids de l'arête AA est 0,9.
  Le poids de l'arête AB est 0,1.
- « 60 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en magasin affirment vouloir continuer à effectuer le suivant en magasin. Les autres personnes (soit 40%) comptent effectuer leur prochain achat en utilisant internet ».
  Le poids de l'arête BB est 0,6
  Le poids de l'arête BA est 0,4.
- On obtient l'arbre probabiliste suivant :



2. La matrice de transition M associée au graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique est une matrice carrée 2x2 $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA : 0,9
m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,1
m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,4
m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,6

$M=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

3.a. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$M^4=\begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$$

b. $P_5=P_1M^4$

$$\begin{pmatrix} a_5 & b_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1825 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \end{pmatrix}$$

donc $a_5 =$ **0,8125** et la probabilité que la personne interrogée fasse son $5^{\text{ème}}$ achat sur internet est : **0,8125.**

4.a. $P=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ est l'état stable si seulement si $\begin{cases} P=PM \\ a+b=1 \end{cases}$

$$P=PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,9\,a+0,4\,b & 0,1\,a-0,4\,b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0,9\,a+0,4\,b \\ b=0,1\,a+0,6\,b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,1\,a-0,4\,b=0 \\ 0,1\,a-0,4\,b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \{0,1\,a-0,4\,b=0$$

$$P=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \text{ état stable } \Leftrightarrow \begin{cases} 0,1\,a-0,4\,b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$$

b. $\begin{cases} 0,1\,a-0,4\,b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4\,b \\ a+b=1 \end{cases}$

On obtient :

$$5b=1 \Leftrightarrow b=\frac{1}{5}=0{,}2 \quad \text{et} \quad a=1-b=\frac{4}{5}=0{,}8$$

c. A long terme la probabilité que cette personne fasse ses achats sur internet est : **0,8.**

5.a. Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$P_{n+1}=P_n M$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9\,a_n + 0{,}4\,b_n & 0{,}1\,a_n + 0{,}6\,b_n \end{pmatrix}$$

donc $a_{n+1}=0{,}9\,a_n+0{,}4\,b_n$

d'autre part : $a_n+b_n=1$ soit $b_n=1-a_n$

$$a_{n+1}=0{,}9\,a_n+0{,}4(1-a_n)=0{,}9\,a_n+0{,}4-0{,}4\,a_n=0{,}5\,a_n+0{,}4$$

b.

Variables : N est un entier naturel
A est un nombre réel
Initialisation : Affecter à N la valeur 1
Affecter à A la valeur 1
Traitement : Tant que **A > 0,801 faire**
Affecter à A la valeur 0,5xA+0,4
Affecter à N la valeur **N+1**
Fin Tant que
Sortie : Afficher N

c. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$n=1$	$a_1=1 > 0{,}801$
$n=2$	$a_2=0{,}9 > 0{,}801$
$n=3$	$a_3=0{,}85 > 0{,}801$
$n=4$	$a_4=0{,}825 > 0{,}801$
$n=5$	$a_5=0{,}8125 > 0{,}801$
$n=6$	$a_6=0{,}80625 > 0{,}801$
$n=7$	$a_7=0{,}803125 > 0{,}801$
$n=8$	$a_8=0{,}80156225 > 0{,}801$
$n=9$	$a_9=0{,}80078125 < 0{,}801$

donc la valeur affichée par l'algorithme est : **9.**