Exercice 1 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Chaque question ci-après comporte quatre propositions de réponse.
Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. On ne demande pas de justification.
Chaque bonne réponse rapportera un point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.

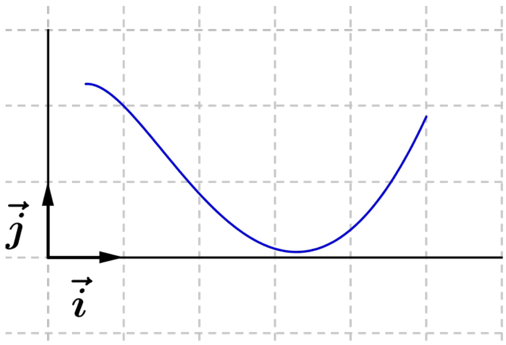
Question 1

La proportion de gauchers dans la population française est de 13 %.
Un intervalle de fluctuation asymptotique, au seuil de 95 %, de la fréquence de gauchers dans un échantillon de 500 personnes prises au hasard dans la population française est :
a. [0,080;0,180] **b.** [0,085;1,75] **c.** [0,100;0,160] **d.** [0,128;0,132]
(Les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-3} près)

Question 2

Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(x)+\ln(3)\geqslant\ln(2x+1)$ est :
a. $[2;+\infty[$ **b.** $]0;2]$ c. $]-\infty;1]$ **d.** $]0;1]$

Pour les questions 3;4 et 5, on considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5;5] par :
$\mathrm{f}(x)=x^2-3x\ln(x)+1$
On a représenté, ci-dessous, cette fonction f dans un repère orthonormé :



Question 3

a. la fonction f est décroissante sur [0,5;4]
b. la fonction f est convexe sur [0,5;5]
c. la courbe représentant f admet un point d'inflexion au point d'abscisse 2.
d. la fonction f est concave sur l'intervalle [0,5;1,5].

Question 4

On note I l'intégrale $\int_1^2 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$, on peut affirmer :

a. $0,5\leqslant I\leqslant 1$ **b.** $4\leqslant I\leqslant 7$ **c.** $1\leqslant I\leqslant 1,75$ **d.** $2\leqslant I\leqslant 4$

Question 5

On souhaite utiliser un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée au centième de la solution α de l'équation $f(x)=1$ sur l'intervalle [1;3]. (On admet que sur cet intervalle l'équation admet bien une unique solution.

Voici trois algorithmes :

Algorithme 1

Initialisation :
a prend la valeur 1
b prend la valeur 3
s prend la valeur 0

Traitement :
$n=(b-a)\times 100$
Pour i allant de 1 à n faire
  x prend la valeur $a+0{,}01\times i$
  s prend la valeur $s+0{,}01\times f(x)$
Fin de Pour

Sortie :
Afficher a

Algorithme 2

Initialisation :
a prend la valeur 1
b prend la valeur 3

Traitement :
Tant que $b-a>0{,}01$ faire
  c prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
  Si $f(c)>1$ alors a prend la valeur c
  Sinon b prend la valeur c
Fin Tant que

Sortie
Afficher a

Algorithme 3

Initialisation :
a prend la valeur 1
b prend la valeur 3

Traitement :
pour x allant de 1 à 3
  Si $f(x)<1$ alors a prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
  Sinon b prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
Fin de Pour

Sortie :
Afficher a

a. L'algorithme 1 affiche une valeur approchée au centième de α.
b. L'algorithme 2 affiche une valeur approchée au centième de α.
c. L'algorithme 3 affiche une valeur approchée au centième de α.
d. Aucun des trois algorithmes n'affiche de valeur approchée au centième de α.

CORRECTION

Question 1 **Réponse : c** **[0,100;0,160]**

Justifications non demandées

p=0,13 et n=500

$n \geqslant 30 \quad pn = 65 \geqslant 5 \quad (1-p)n = 435 \geqslant 5$

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est

$$I = \left[0{,}13 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}13 \times 0{,}87}{500}} ; 0{,}13 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}13 \times 0{,}87}{500}}\right]$$

$$0{,}029 < 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}13 \times 0{,}87}{500}} < 0{,}030$$

donc on choisit : $I = [0{,}100 ; 0{,}160]$

Question 2 **Réponse : d** **]0;1]**

Justifications non demandées

L'ensemble de définition de l'inéquationest : $]0;+\infty[$.

$\ln(x) + \ln(3) \leqslant \ln(2x+1) \Leftrightarrow \ln(3x) \leqslant \ln(2x+1)$

ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow 0 < 3x \leqslant 2x+1 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant 1$

Question 3 **Réponse : d** **la fonction f est concave sur [0,5;1,5]**

Justifications non demandées

Par lecture graphique on peut affirmer que les réponses a et b sont fausses.

Pour étudier les réponses c et d, il faut effectuer des calculs.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0,5;5].

$f(x) = x^2 - 3x\ln(x) + 1$

f est deux fois dérivable sur [0,5;5]

$$f'(x) = 2x - 3\ln(x) - 3x \times \frac{1}{x} = 2x - 3\ln(x) - 3$$

$$f''(x) = 2 - 3 \times \frac{1}{x} = \frac{2x-3}{x}$$

Le signe de $f''(x)$ sur [0,5;5] est le signe de $2x-3$.

$$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} = 1{,}5$$

x	0.5		1.5		5
$f''(x)$		-	0	+	

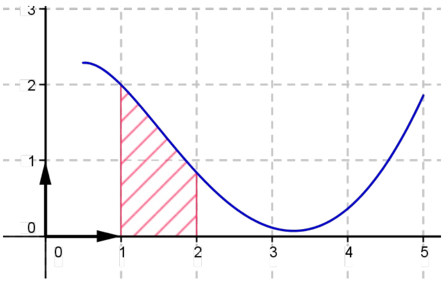
Conséquence

Le point d'abscisse 1,5 est un point d'inflexion de la courbe est concave sur l'intervalle [0,5;1,5].

Question 4 **Réponse : c** $1 \leqslant I \leqslant 1{,}75$

Justifications non demandées

f est continue et positive sur [1;2] donc I est l'aire, en unité d'aire, de la hachurée sur la figure suivante.



Par lecture graphique, on peutaffirmer que cette partie a une aire comprise entre 1U.A. et 2U.A.
La seule réponse compatible avec ce résultat est la réponse c : $1 \leqslant I \leqslant 1{,}75$

Question 5 **Réponse : b** **L'algorithme 2 affiche une valeur approchée au centième de α .**