Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un club de basketball a suivi sur plusieurs années, l'évolution des abonnements annuels de ses supporteurs. Partant de ces observations, on décide de modéliser le nombre annuel d'abonnés sur la base d'un taux de réabonnement de 80 % d'une année sur l'autre auxquels s'ajoutent 300 nouveaux abonnements.
On se propose d'étudier l'évolution du nombre annuel des abonnés du club de basketball à l'aide de ce modèle.
Le nombre d'abonnés au club à la fin de l'année 2014 était 1128.
Pour tout entier naturel n, on note a_n , le nombre d'abonnés à la fin de l'année 2014+n.
On a donc $a_0=1128$.

1. Estimer le nombre d'abonnés à la fin de l'année 2015.

2. Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, on a : $a_{n+1}=0{,}8\,a_n+300$.

3. Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par : $u_n=1500-a_n$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Exprimer u_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $a_n=1500-372\times 0{,}8^n$.

4. Résoudre algébriquement l'inéquation $a_n>1450$ et interpréter le résultat obtenu.

5. La municipalité dont dépend le club de basketball prévoit de construire une nouvelle salle de sport pour accueillir les rencontres du club.
On souhaite pouvoir accueillir tous les abonnés du club auxquels s'ajouteraient 500 spectateurs occasionnels non abonnés au club.
En tenant compte des résultats précédents, combien de places de spectateurs au minimum doit-on prévoir dans cette salle ?

CORRECTION

1. Le nombre d'abonnés à la fin de 2014 est 1128.

80 % des abonnés de 2014 se réabonnent en 2015 soient $1128\times\frac{80}{100}=902{,}4$, 902 abonnés, auxquels s'ajoutent 300 nouveaux abonnés.
A la fin de l'année 2015, il y a $902+300=1202$ abonnés.

2. Pour tout entier naturel n :
a_n est le nombre d'abonnés à la fin de l'année 2014+n.
a_{n+1} Est le nombre d'abonnés à la fin de l'année 2014+(n+1)

80 % des abonnés de 2014+n se réabonnent pour 2014+(n+1) soient $a_n\times\frac{80}{100}=0{,}8\,a_n$ abonnés, auxquels s'ajoutent 300 nouveaux abonnés donc $a_{n+1}=0{,}8\,a_n+300$.

3. Pour tout entier naturel n :
$u_n=1500-a_n$ donc $a_n=1500-u_n$.

a. $u_{n+1}=1500-a_{n+1}=1500-(0{,}8\,a_n+300)=1200-0{,}8\times a_n=1200-0{,}8\times(1500-u_n)$
$u_{n+1}=1200-0{,}8\times1500+0{,}8\,a_n=1200-1200+0{,}8\,a_n=0{,}8\,a_n$
(u_n) est la suite géométrique de raison $q=0{,}8$ et de 1^{er} terme u_0
$u_0=1500-a_0=1500-1128=372$

b. Pour tout entier naturel n :
$u_n=u_0\times q^n=372\times0{,}8^n$

c. Pour tout entier naturel n : $a_n=1500-u_n$
$a_n=1500-372\times0{,}8^n$

4. $a_n>1450\Leftrightarrow1500-372\times0{,}8^n>1450\Leftrightarrow1500-1450>372\times0{,}8^n\Leftrightarrow\frac{50}{372}>0{,}8^n$

ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
$\Leftrightarrow\ln\left(\frac{50}{372}\right)>\ln(0{,}8^n)\Leftrightarrow\ln\left(\frac{50}{372}\right)>n\times\ln(0{,}8)$
$0<0{,}8<1$ donc $\ln(0{,}8)<0$
$\Leftrightarrow\frac{\ln\left(\frac{50}{372}\right)}{\ln(0{,}8)}<n$ et $\frac{\ln\left(\frac{50}{372}\right)}{\ln(0{,}8)}=8{,}994$ à 10^{-3} près.

n est un entier naturel donc $9\leqslant n$.
9 est le plus petit entier naturel n tel que $a_n>1450$

Conséquence
2014+9=2023 est la première année pour laquelle le nombre d'abonnés est strictement supérieur à 1450.

5. Pour tout entier naturel n :
$u_n=372\times0{,}8^n$ donc $u_n>0$ or $u_n=1500-a_n$ on a $1500-a_n>0$ soit $1500>a_n$.
$0<0{,}8<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}8^n=0$ et $\lim\limits_{n\to:+\infty}u_n=0$.
On a $a_n=1500-u_n$ on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1500$.
Le nombre d'abonnés sera voisin de 1500 dans l'avenir mais toujours inférieur ou égal0 1500.
On doit prévoir $1500+500=2000$ pour nombre minimal de places de spectateurs dans la salle.