

Exercice 2 **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité** **5 points**

Deux supermarchés concurrents, Alphamarché et Bétamarché ouvrent simultanément un service de retrait permettant à leurs clients de récupérer leurs courses après avoir passé leur commande sur internet.

Afin de promouvoir leur service de retrait, chacun organise une campagne de publicité.

Alphamarché contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages mensuels où les clients qui utilisent les services de retrait se prononcent tous en faveur d'un seul service de retrait, celui d'Alphamarché ou celui de Bétamarché.

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Alphamarché.

Les sondages mensuels ont permis de mettre en évidence que les arguments publicitaires font évoluer chaque mois la répartition.

On décide de modéliser cette évolution en considérant que 10 % des personnes préférant Alphamarché et 15 % des personnes préférant Bétamarché changent d'un mois sur l'autre.

Le mois du début de la campagne est noté mois 0.

On interroge, au hasard, un client faisant ses courses dans l'un des deux services de retrait.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n la probabilité que le client interrogé préfère Alphamarché le mois n ;
- b_n la probabilité qu'il préfère Bétamarché le mois n ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne désignant l'état probabiliste au mois n .

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
2. On note A , l'état « le client interrogé préfère Alphamarché » et B , l'état « le client interrogé préfère Bétamarché ».
Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B .
- 3.a. Ecrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
b. Montrer que $P_1 = (0,3 \quad 0,7)$.
- 4.a. Exprimer, pour tout entier naturel n , P_n en fonction de P_0 , M et n .
b. En déduire la matrice ligne P_3 et interpréter ce résultat.
5. Le service de retrait d'Alphamarché finira-t-il par être préféré à celui de Bétamarché ?
Justifier.

CORRECTION

1. $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$

« Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Alphamarché » (donc 80 % des personnes interrogées préfèrent Bétamarché).

Conséquence

$a_0 = 0,2 \quad b_0 = 0,8 \quad P_0 = (0,2 \quad 0,8)$

2. A et B sont les deux sommets du graphe.

L'énoncé précise :

« 10 % des clients préférant Alphamarché et 15 % des clients préférant Bétamarché changent d'avis le mois suivant », donc :

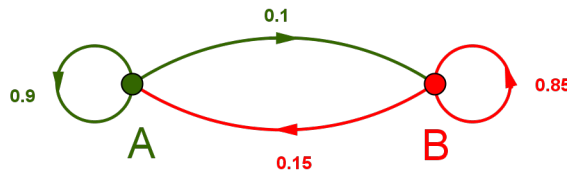
- 10 % des clients d'Alphamarché un mois deviennent clients de Bétamarché le mois suivant et 90 % des clients d'Alphamarché un mois restent clients d'Alphamarché le mois suivant.

Le poids de l'arête AB est 0,1 et le poids de l'arête AA est 0,9.

- 15 % des clients de Bétamarché un mois deviennent clients d'Alphamarché le mois suivant et 85 % des clients de Bétamarché un mois restent clients de Bétamarché le mois suivant.

Le poids de l'arête BA est 0,15 et le poids de l'arête BB est 0,85.

- On obtient le graphe probabiliste suivant :



3.a. La matrice de transition de ce graphe, en respectant l'ordre alphabétique des sommets et une

matrice carrée $2 \times 2 \quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA

m_{12} est le poids de l'arête AB

m_{21} est le poids de l'arête BA

m_{22} est le poids de l'arête BB

$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$

b. $P_1 = P_0 M = (0,2 \quad 0,8) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = (0,2 \times 0,9 + 0,8 \times 0,15 \quad 0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,85)$

$P_1 = (0,18 + 0,12 \quad 0,02 + 0,68) = (0,3 \quad 0,7)$

4.a. Pour tout entier naturel n

$P_n = P_0 M^n$

b. $P_3 = P_0 M^3 = P_1 M^2 = P_2 M$

On peut calculer M^3 en utilisant la calculatrice ou on peut calculer P_2 et P_3 .

$P_2 = (0,3 \quad 0,7) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = (0,3 \times 0,9 + 0,7 \times 0,15 \quad 0,3 \times 0,1 + 0,7 \times 0,85)$

$P_2 = (0,27 + 0,105 \quad 0,03 + 0,595) = (0,375 \quad 0,625)$

$P_3 = (0,375 \quad 0,625) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = (0,375 \times 0,9 + 0,625 \times 0,15 \quad 0,375 \times 0,1 + 0,625 \times 0,85)$

$P_3 = (0,43125 \quad 0,56875)$

Interprétation

Au bout de trois mois, 43 % des personnes seront clients d'Alphamarché et 57 % de Bétamarché.

5. Il suffit de déterminer l'état stable.

$$P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \quad 0 \leq a \leq 1 \quad 0 \leq b \leq 1$$

$$P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \text{ est l'état stable si et seulement si } \begin{cases} a+b=1 \\ P=PM \end{cases}$$

$$P=PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = (0,9a + 0,15b \quad 0,1a + 0,85b) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 0,9a + 0,15b \\ b = 0,1a + 0,85b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,1a = 0,15b \\ 0,15b = 0,1a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a = 15b \\ 2a = 3b \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \text{ état stable } \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 3b \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\text{On obtient } 2(1-b) = 3b \Leftrightarrow 5b = 2 \Leftrightarrow b = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ donc } a = 0,6$$

$P = (0,6 \quad 0,4)$ est l'état stable.

A long terme 60 % des personnes sont des clients d'Alphamarché.

Conclusion

Le service de retrait d'Alphamarché sera dans l'avenir préféré à celui de Bétamarché.