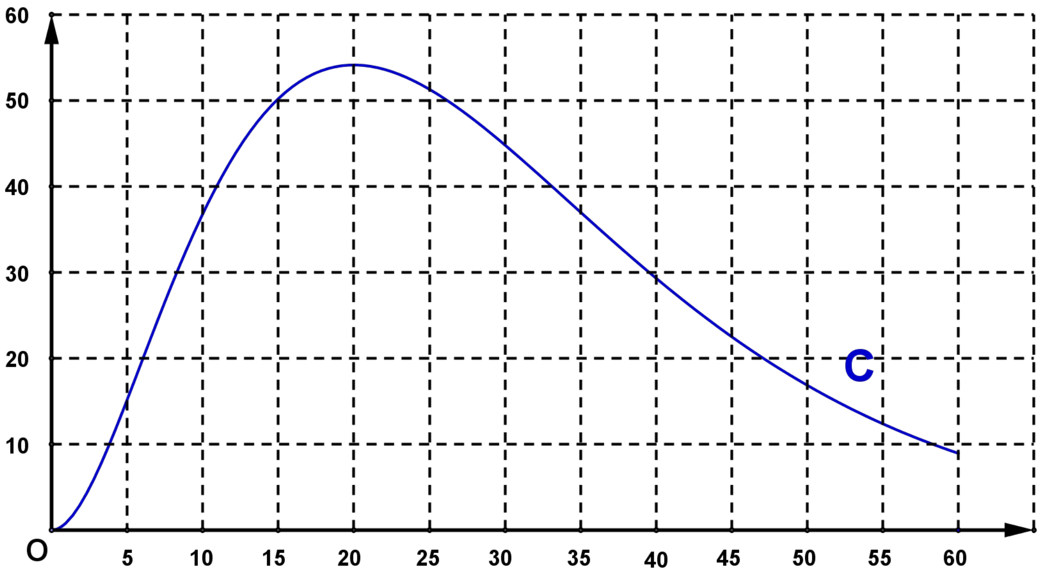
Exercice 4 — 5 points

La courbe C ci-dessous représente le nombre de personnes malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie en fonction du nombre t de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.

Partie A



1. A l'aide du graphique, déterminer au bout de combien de jours le nombre de malades est maximal puis préciser le nombre approximatif de malades ce jour-là.

2. Estimer graphiquement le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus forte ? (Expliquer rapidement la démarche utilisée.)

Partie B

On modélise le nombre de malades (en milliers) en fonction du temps, à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle [0;60] par : $f(t)=t^2e^{-0,1t}$ où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.
Pour étudier les propriétés de la fonction f, on a utilisé un logiciel de calcul formel qui a fourni les résultats suivants ;

- $f'(t)=0,1t(20-t)e^{-0,1t}$
- $f''(t)=(0,01t^2-0,4t+2)e^{-0,1t}$
- $F(t)=(-10t^2-200t-2000)e^{-0,1t}$

où f' désigne la dérivée de f, f'' désigne sa dérivée seconde et F une primitive de f.

1. Démontrer le résultat : $f'(t)=0,1t(20-t)e^{-0,1t}$ qui a été fourni par le logiciel.

2.a. Détermine le signe de $f'(t)$ sur $[0;60]$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur [0;60].

3. Le nombre moyen de malades par jour, en milliers, durant les 60 premiers jours après l'apparition de la maladie est donnée par $N=\frac{1}{60}\int_{1}^{60} f(t)\,dt$.

a. Déterminer la valeur exacte de N

b. Quel est le nombre moyen de malades par jour, arrondi à la dizaine ?

4.a. Justifier par le calcul que, sur l'intervalle [0;15], la courbe représentative de la fonction f admet un unique point d'inflexion.
Préciser une valeur arrondie à l'unité de l'abscisse de ce point d'inflexion.

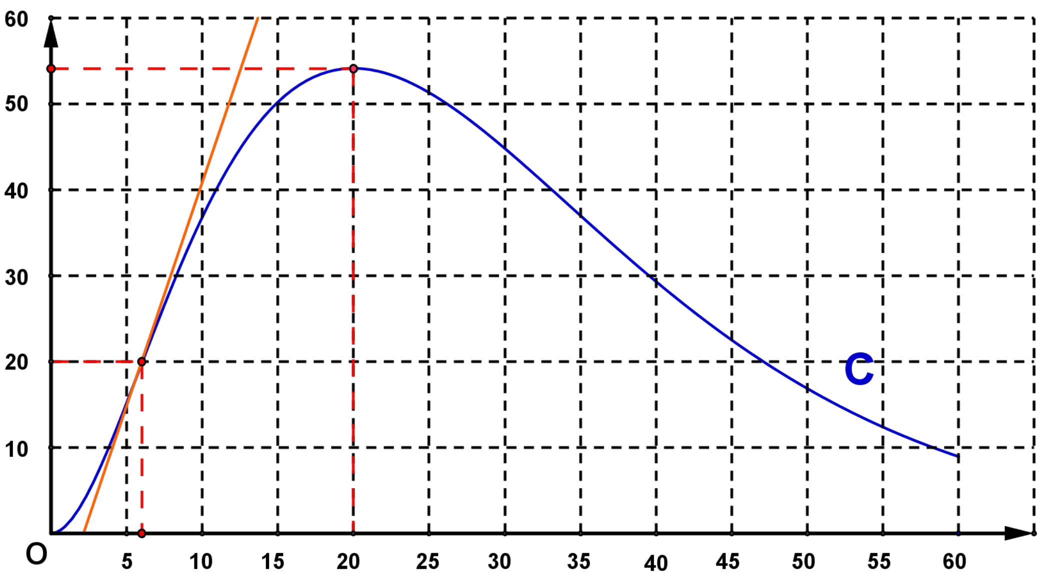
b. Donner une interprétation concrète de cette abscisse.

CORRECTION

Partie A

1. Le nombre de malades est maximal pour **t=20.**
Graphiquement on détermine l'ordonnée du point d'abscisse 20 de la courbe, on obtient:54.
Le nombre (approximatif) de malades pour t=20 est **54 000**.

2. La vitesse de propagation de la maladie est la plus forte lorsque la fonction dérivée, de la fonction de représentation graphique C est maximale.
Graphiquement : C est la courbe représentative d'une fonction convexe sur [0;6] et concave sur [6;60].
Conclusion
La propagation de la maladie es la plus forte pour **t=6.**



Partie B

1. Pour tout nombre réel t de l'intervalle [0;60] $f(t)=t^2 e^{-0,1t}$
f est dérivable sur [0;60].
$u(t)=t^2$ $u'(t)=2t$
$v(t)=e^{-0,1t}$ $v'(t)=-0,1e^{-0,1t}$
On dérive un produit
$f'(t)=2te^{-0,1t}+t^2(-0,1te^{-0,1t})=(2t-0,1t)e^{-0,1t}$
$f'(t)=0,1t(20-t)e^{-0,1t}$

2.a. Pour tout nombre réel t de l'intervalle [0;60] on a $e^{-0,1t}>0$ donc le signe de $f'(t)$ et le signe de $0,1t(20-t)$ sur [0;60].

t	0		20		60
0.1t	0		+		
20 - t		+	0	–	
f '(t)	0	+	0	–	

On peut aussi utiliser le signe d'un trinôme.

b. $f(0)=0$ et $f(60)=3600^{-6}=8{,}924$ à 10^{-3} près et $f(20)=400\,e^{-20}=54{,}134$ à 10^{-3} près.

Tableau de variation de f

t	0		20		60
f '(t)	0	+	0	−	
f (t)	0	↗	f (20)	↘	f (60)

3. $N=\dfrac{1}{60}\displaystyle\int_0^{60} f(t)\,dt$

a. F, définie sur l'intervalle [0;60] par : $F(t)=(-10\,t^2-200\,t-2000)e^{-0{,}1\,t}$ est une primitive de f sur l'intervalle [0;60].

$$N=\frac{1}{60}(F(60)-F(0))=((-36000-12000-2000)e^{-6}+2000)$$

$$N=\frac{1}{60}(2000-50000\,e^{-6})=\frac{100}{3}-\frac{2500}{3}e^{-6}$$

b. Un valeur approchée de $\dfrac{100}{3}-\dfrac{2500}{3}e^{-6}$ à 10^{-2} près est : 31,27

Conclusion

Le nombre moyen de malades par jour est : 31 270.

4.a. Pour tout nombre réel t de l'intervalle [0;60], on a $f''(t)=(0{,}01\,t^2-0{,}4\,t+2)e^{-0{,}1\,t}$

Le signe de $f''(t)$ est le signe du trinôme $T(t)=0{,}01\,t^2-0{,}4\,t+2$

$\Delta=0{,}4^2-4\times 2\times 0{,}01=0{,}16-0{,}08=0{,}08>0$

$\Delta=\dfrac{8}{100}=\dfrac{2}{25}$ $\sqrt{\Delta}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}=0{,}2\sqrt{2}$

Le trinôme T(t) admet deux racines distinctes.

$t_1=\dfrac{0{,}4-0{,}2\sqrt{2}}{0{,}02}=20-10\sqrt{2}=5{,}86$ à 10^{-2} près

$t_2=\dfrac{0{,}4+0{,}2\sqrt{2}}{0{,}02}=20+10\sqrt{2}=34{,}14$ à 10^{-2} près

t	0		t_1		t_2		60
f ''(t)		+	0	−	0	+	

On donne le signe de $f''(t)$ sous la forme d'un tableau.

$0<t_1<15<t_2<60$

$f''(t_1)=0$

Pour tout nombre réel t de $[0;t_1[$, $f''(t)>0$ donc fest convexe sur $[0;t_1[$.

Pour tout nombre réel t de $]t_1;15]$, $f''(t)<0$ donc f est concave sur $]t_1;15]$.

Conclusion

Le point d'abscisse t_1 de C est l'unique point d'inflexion de C sur l'intervalle [0;15].

La valeur arrondie de t_1 à l'unité près est 6.

b. **Le jour 6 est le jour où la propagation de la maladie est la plus forte.**