

Exercice 1

4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x$. On note f' sa fonction dérivée.

On a alors :

- a. $f'(x) = 0$ b. $f'(x) = \ln(x)$ c. $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ d. $f'(x) = \frac{1}{x} - x$

2. Les entiers naturels n vérifiant l'inéquation $6 \times 0,95^n - 1 \leq 2$ appartiennent à l'intervalle :

- a. $\left] -\infty; \frac{\ln(3)}{\ln(5,7)} \right]$ b. $\left] -\infty; \ln\left(\frac{0,5}{0,95}\right) \right]$ c. $\left] -\infty; \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)} \right]$ d. $\left[\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}; +\infty \right[$

3. Une entreprise fabrique des tubes métalliques de longueur 2m.

Un tube métallique est considéré comme étant dans la norme si sa longueur est comprise entre 1,98 m et 2,02 m. On prélève au hasard un échantillon de 1000 tubes, on observe que 954 tubes sont dans la norme.

L'intervalle de confiance de la fréquence des tubes dans la norme pour cette entreprise au niveau de confiance de 95 %, avec les bornes arrondies à 10^{-3} , est :

- a. $[0,922; 0,986]$ b. $[0,947; 0,961]$ c. $[1,98; 2,02]$ d. $[0,953; 0,955]$

4. Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est 0,8. Les tirs sont supposés indépendants.

Quelle est la probabilité qu'il touche 3 fois la cible sur une série de 6 tirs ?

- a. 0,512 b. 2,4 c. 0,262144 d. 0,08192

CORRECTION

1. **Réponse : b** $f'(x) = \ln(x)$

Justification non demandée

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$$

2. **Réponse : d** $\left[\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}; +\infty \right[$

Justification non demandée

$$6 \times 0,95^n - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 6 \times 0,95^n \leq 3 \Leftrightarrow 0,95^n \leq \frac{3}{6} = 0,5$$

\ln est une fonction croissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln(0,95^n) \leq \ln(0,5) \Leftrightarrow n \times \ln(0,95) \leq \ln(0,5)$$

$$0 < 0,5 < 1 \text{ donc } \ln(0,95) < 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}$$

donc n appartient à l'intervalle $\left[\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}; +\infty \right[$.

3. **Réponse : a** $[0,922; 0,986]$

Justification non demandée

La proportion de tubes dans de l'échantillon de 1000 tubes est : $f = \frac{954}{1000} = 0,954$.

L'intervalle de confiance au seuil de 95 % est : $I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{1000}}; f + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right]$

$$\frac{1}{\sqrt{1000}} = 0,032 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$$I = [0,954 - 0,032; 0,954 + 0,032] = [0,922; 0,986]$$

4. **Réponse : d** 0,08192

Justification non demandée

Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est 0,8. Les tirs sont supposés indépendants.

On considère la loi de Bernoulli pour un tir :

Succès S : « l'archer atteint la cible », la probabilité de succès est $p = 0,8$.

Echec \bar{S} : « l'archer n'atteint pas la cible », la probabilité de l'échec est $q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$.

L'archer effectue 6 tirs indépendants donc la loi de probabilité de la variable aléatoire égale au nombre de succès en 6 épreuves est la loi binomiale de paramètres 6 et 0,8.

La probabilité que l'archer atteigne 3 fois la cible en 6 épreuves est : $\binom{6}{3} \times 0,8^3 \times 0,2^3$

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\binom{6}{3} = 20$ et $\binom{6}{3} \times 0,8^3 \times 0,2^3 = 0,08192$.