Exercice 2 — 5 points

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27500 étudiants en septembre 2016.
Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33000 étudiants.
Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1^{er} septembre et le 30juin) ;
- les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre 2016+n, on a donc $u_0=27500$.

1.a. Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.
1.b. Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}=1{,}04\,u_n-156$.

3. Recopier et compléter les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

L1 **Variables :** n est un nombre entier naturel
L2 U est un nombre réel
L3 **Traitement :** n prend la valeur 0
L4 U prend la valeur 27500
L5 Tant que $U\leqslant\ldots$ faire
L6 n prend la valeur . . . .
L7 U prend la valeur . . . .
L8 Fin Tant que
L9 **Sortie :** Afficher . . . .

4.a. On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.
Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Initialisation	Etape 1	. . .
Valeur de n	0	. . .	
Valeur de U	27500	. . .	

4.b. Donner la valeur afficher en sortie de cet algorithme.

5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-3900$.
5.a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
5.b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=23600\times1{,}04^n+3900$.
5.c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexe de l'exercice.

CORRECTION

1.a. Le nombre d'étudiants à la rentée de septembre 2016 est 27500. Or 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1^{er} septembre et le 30 juin), donc le nombre d'étudiants en juin 2017 est : 27500-150 = **27350**.

1.b. Les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède, donc le nombre d'étudiants en septembre 2017 est :

$27350+27350\times\frac{4}{100}=27350+1094$ = **28444**.

2. Pour tout entier naturel n, u_n est le nombre d'étudiants estimé à la rentrée de septembre 2016+n et u_{n+1} est le nombre d'étudiants estimé à la rentrée de septembre 2016+(n+1).

On a 150 étudiants démissionnant en cours d'année universitaire donc le nombre d'étudiants en juin 2016+(n+1) est : u_n-150 .

Les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède,donc le nombre d'étudiants en septembre 2016+(n+1) est :

$$u_{n+1}=u_n-150+\frac{4}{100}\times(u_n-150)=u_n-150+0{,}04\,u_n-6=1{,}04\,u_n-156$$

3. On complète certaines lignes de l'algorithme.

L5		Tant que $U\leqslant$ **33000** faire
L6		n prend la valeur **n+1**
L7		U prend la valeur **1,04U-156**
L9	**Sortie :**	Afficher **2016+n**

4.a. En utilisant l'algorithme pas à pas, on obtient :

	Initialisation	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5	Etape 6
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de U	27500	28444	29425	30446	31509	32613	33761

4.b. La valeur affichée à la sortie de cet algorithme est : 2016+6 = **2022**

5. Pour tout entier naturel n :

$v_n=u_n-3900$ donc $u_n=v_n+3900$

5.a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-3900=1{,}04\,u_n-156-3900=1{,}04(v_n+3900)-4056=1{,}04\,v_n+4056-4056$$

$$v_{n+1}=1{,}04\,v_n$$

(v_n) est la **suite géométrique** de premier terme $v_0=u_0-3900=27500-3900$ = **23600** et de raison **q = 1,04**.

5.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0\times q^n=23600\times1{,}04^n$ et $u_n=v_n+3900=23600\times1{,}04^n+3900$.

5.c. $1{,}04>1$ donc $\lim_{n\to+\infty}1{,}04^n=+\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

Avec ce modèle, il sera impossible de gérer le nombre des inscription des étudiants, à long terme.