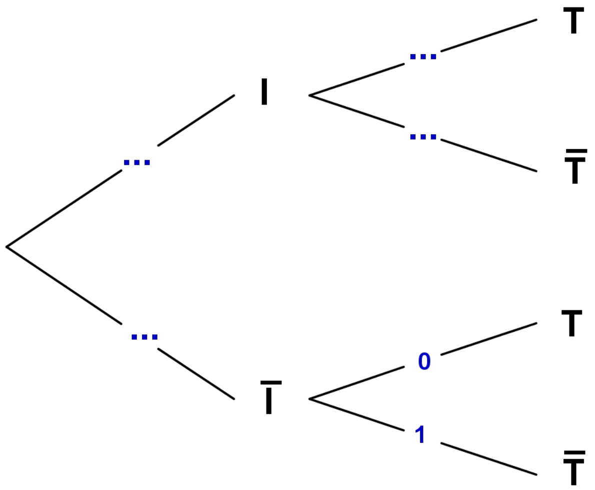
## Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

D'après l'AFDIAG (Association Française Des Intolérants au Gluten), la maladie coeliaque, aussi appelée intolérance au gluten, est une des maladies digestives les plus fréquentes. Elle touche environ 1 % de la population.
On estime que seulement 20 % des personnes intolérantes au gluten passent le test pour être diagnostiquées.
On considère que si une personne n'est pas intolérante au gluten, elle ne passe pas le test pour être diagnostiquées.
On choisit au hasard une personne dans la population française qui compte environ 66,6 millions d'habitants au 1er janvier 2016.
On considère les événements :
. I : « la personne choisie est intolétante au gluten » ;
. T : « la personne choisie passe le test pour être diagnostiquée ».

**Partie A**

**1.** Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :




2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit intolérante au gluten et ne passe pas le test pour être dianostiquée.

**3.** Montrer que $P(T)=0{,}002$ .

**Partie B**

L'AFDIAG a fait une enquête et a constaté que la maladie coeliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premires symptomes.
On note X la variable aléatoire représentant le temps en années mis pour diagnostiquer la maladie coeliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.
On admet que la loi de X pet être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu=11$ et d'écart-type $\sigma=4$ .

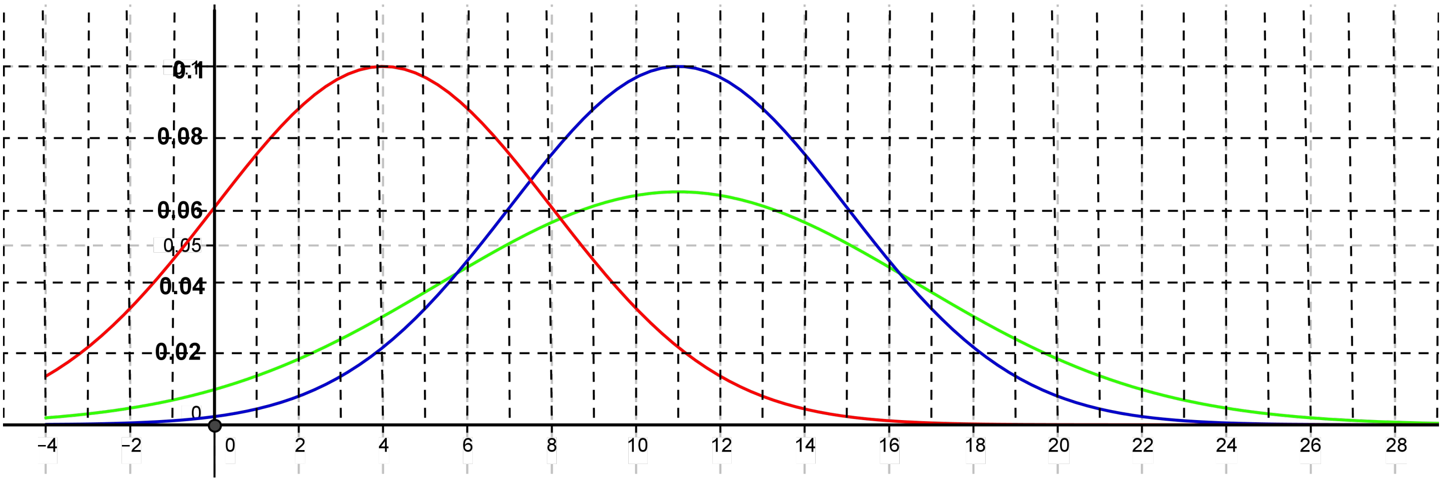
**1.** Calculer la probabilité que la maladie soit diagnostiquée entre 9 ans et 13 ans après les premiers symptômes. Arrondir le résultat à $10^{-3}$ .

**2.** Calculer $P(X\leqslant 6)$ . Arrondir le résultat à $10^{-3}$ .

**3.** Sachant que $P(X\leqslant a)=0{,}84$ , donner la valeur de a arrondie à l'unité.
In terpréter le résultat dans le contexe de l'exercice.

**4.** Laquelle de ces trois courbes représente la fonction de densité de la loi normale d'espérance $\mu=11$ et d'écart-type $\sigma=4$ ?
Justifier le choix. On pourra s'aider des réponses précédentes.

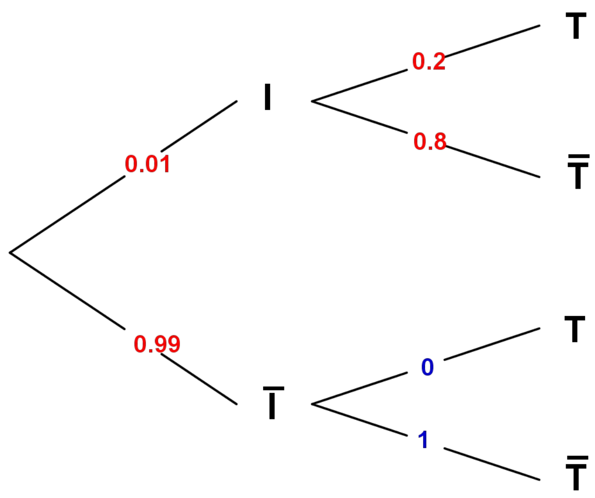

0,1
0,08
0,06
0,05
0,04
0,02
0
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28

**CORRECTION**

**Partie A**

**1.** L'énoncé précise :

- La maladie coeliaque touche environ 1 % de la population donc $P(I)=0{,}01$ et $P(\bar{I})=1-0{,}01=0{,}99$ .
- On estime que seulement 20 % des personnes intolérantes au gluten passent le test pour être diagnostiquées donc $P_I(T)=0{,}2$ et $P_I(\bar{T})=1-P_I(T)=1-0{,}2=0{,}8$ .
- On considère que si une personne n'est pas intolérante au gluten, elle ne passe pas le test pour être diagnostiquée donc $P_{\bar{I}}(T)=0$ et $P_{\bar{I}}(\bar{T})=1$ .
- On obtient l'arbre de probabilités ci-dessous :




**2.** On nous demande de calculer $P(I\cap\bar{T})$
$P(I\cap\bar{T})=P(I)\times P_I(\bar{T})=0{,}01\times 0{,}8=$ **0,008**

**3.** En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on obtient :
$P(T)=P(I\cap T)+P(\bar{I}\cap T)=P(I)\times P_I(T)+P(\bar{I})\times P_{\bar{I}}(T)=0{,}01\times 0{,}2+0{,}99\times 0=$ **0,002**

**Partie B**

**1.** En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(9\leqslant X\leqslant 13)=$ **0,383**

**2.** En utilisant la calculatrice, on obtient : $P(X\leqslant 6)=$ **0,106**

**3.** $P(X\leqslant a)=0{,}84$
En utilisant la calculatrice, on obtient **a = 15** à l'unité près.
Remarque
Nous savons que si la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors
$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0{,}68$ et $P(X\leqslant\mu-\sigma)=P(\mu+\sigma)=\dfrac{1-0{,}68}{2}=0{,}16$ .

*Conséquence*
$P(X\leqslant \mu+\sigma)=0{,}68+16=0{,}84$
Pour l'exemple $\mu=11$ et $\sigma=4$ donc $P(X\leqslant 11+4)=0{,}84$ soit $P(X\leqslant 15)=0{,}84$
On obtient **a = 15.**

**4.** La droite d'équation $x=\mu$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction de densité.
La courbe en rouge n'admet pas la droite d'équation $x=11$ pour axe de symétrie, donc la courbe en rouge n'est pas solution.

Le maximum de la fonction de densité est : $M=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}=0,1$ à $10^{-1}$ près.

Donc **la courbe cherchée est la courbe en bleu**.

Remarque

$P(9\leqslant X\leqslant 13)=0,383$ donc l'aire (en unité d'aire) de la partie de plan comprise entre la courbe de densité de la loi normale d'espérance $\mu=11$ et d'écart-type $\sigma=4$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=9$ et $x=13$ est 0,383.

Pour la courbe envert cette partie de plan est comprise dans un rectangle de base 4 et de hauteur 0,08 donc d'aire : $4\times 0,08=0,32<0,383$.

*Conséquence*

La courbe en vert n'est solution.