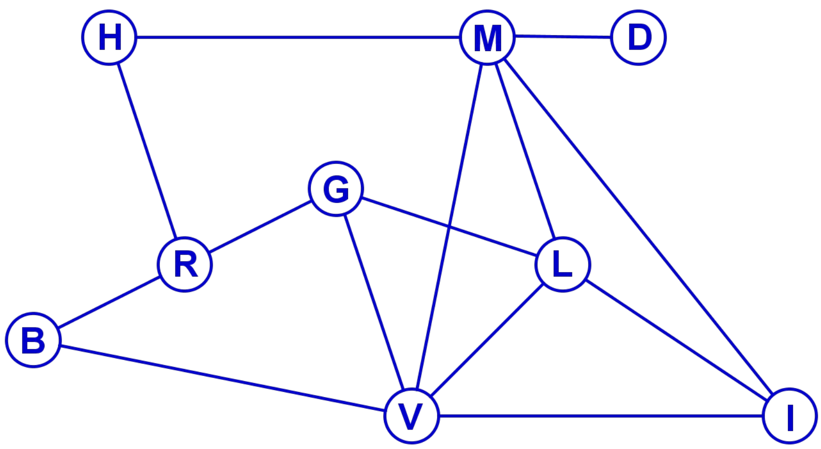
Exercice 3 Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité 5 points

Sarah, une jeune étudiante en géologie, souhaite partir en voyage en Islande avec des amis. Elle a loué une voiture tout terrain pour pouvoir visiter les lieux remarquables qu'elle a sélectionnés. Sarah a construit le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les lieux à visiter et les arêtes représentes les routes ou pistes :



B: Le lagon bleu
D: Chute d'eau de Dettifoss
G: Geyser de Geysir
H: Rocher Hvitserkur
I: Lagune glacièrede Iôkulsarlôn
L: Massif du Landmannalaugar
M: Lac de Myvatn
R: Capitale Reykjavik
V: Ville de Vik

1. Dans cette question, chaque réponse sera justifiée.
1.a. Déterminer l'ordre du graphe.
1.b. Déterminer si le graphe est connexe.
1.b. Déterminer si le graphe est complet.

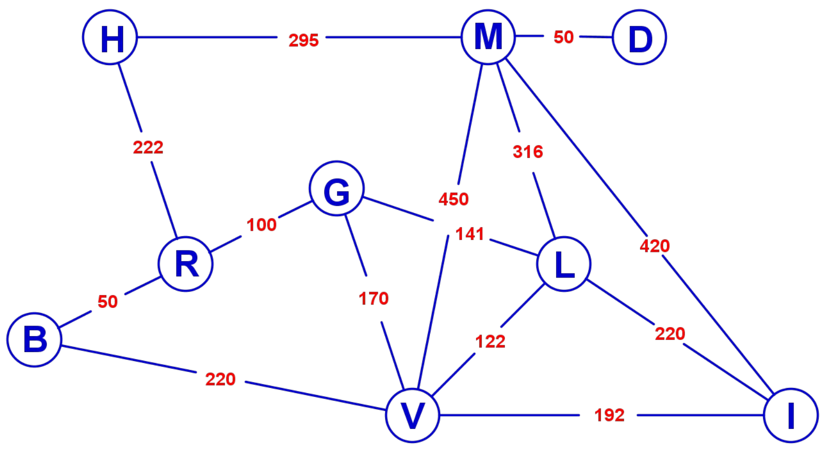
2. Sarah désire emprunter toutes les routes une et une seule fois. Déterminer, en justifiant, si cela est possible.

3. On appelle M la matrice associée au graphe précédent sachant que les sommets sont placés dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous une partie de la matrice M ainsi que la matrice M^4.

$$M=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&1\\ \dots&\dots&\dots&1&1&1&0&0&1\\ \dots&\dots&\dots&1&0&0&0&0&0\\ \dots&\dots&\dots&0&1&1&1&0&0 \end{pmatrix} \quad M^4=\begin{pmatrix} 12&3&16&8&14&13&15&2&10\\ 3&5&5&6&9&11&6&3&12\\ 16&5&24&11&23&21&26&5&20\\ 8&6&11&10&13&14&9&3&14\\ 14&9&23&13&28&29&29&8&30\\ 13&11&21&14&29&38&32&15&40\\ 15&6&26&9&29&32&43&14&14\\ 2&3&5&3&8&15&14&15&21\\ 10&12&20&14&30&40&34&21&49 \end{pmatrix}$$

3.a. Il manque certains coefficients de la matrice M. Compléter et recopier uniquement la partie manquante de cette matrice.
3.b. Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 4 permettant d'aller de B en D.

4. Sur le graphe pondéré ci-après, on a indiqué sur les arêtes les distances en kilométre entre les différents lieux :



Déterminer à l'aide de l'algorithme de Dijkstra la distance minimale permettant d'aller du sommet B (Lagon Bleu) au sommet D (Chute d'eau de Dettifoss).
Préciser alors le trajet à emprunter.

CORRECTION

1.a. L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
Il y a 9 sommets donc **l'ordre du graphe est 9.**

1.b. Il existe toujours une chaîne reliant deux sommets distincts du graphe, donc **le graphe est connexe.**

1.c. Les sommets R et V ne sont pas adjacents (il n'existe pas d'arête reliant ces deux sommets) donc **le graphe n'est pas complet.**

2. Sarah peut emprunter toutes les routes une et seule fois si et seulement si le graphe admet une chaîne eulérienne.
Théorème d'Euler
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
On détermine le degré de chaque sommet et on donne les résultats sous la forme d'un tableau.

Sommets	B	D	G	H	I	L	M	R	V
Degrés	2	1	3	2	3	4	4	3	5

Il y a 5 sommets de degré impair.
Sarah ne peut pas emprunter toutes les routes une et une seule fois.

3.a. Les sommets sont classés dans l'ordre alphabétique, la matrice $M=(m_{ij})$ est la matrice associée au graphe i et j sont des entiers compris entre 1 et 9.
m_{ij} est le coefficient de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne.
$m_{ij}=1$ S'il existe une arête reliant le $i^{ème}$ sommet au $j^{ème}$ sommet sinon $m_{ij}=0$

$m_{71}=0$ $m_{72}=1$ $m_{73}=0$
$m_{81}=1$ $m_{82}=0$ $m_{83}=1$
$m_{91}=1$ $m_{92}=0$ $m_{93}=1$

On donne la partie manquante de la matrice M sous la forme d'une matrice carréé 3x3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.b. $M^4=(m'_{ij})$
m'_{ij} est le nombre de chaînes de longueur 4 reliant le $i^{ème}$ sommet au $j^{ème}$ sommet.
B est le 1^{er} sommet et D le $2^{ème}$ sommet.
$m'_{12}=m'_{21}=3$.
Il existe 3 chaînes de longueur 4 permettant d'aller de B à D.
Ces trois chemins sont :
B-R-H-M-D
B-V-L-M-D
B-V-I-M-D

4. On utilise l'algorithme de DIJKSTRA pour déterminer la distance minimale perettant d'aller du sommet B (Lagon bleu) au sommet D (chute d'eau de Dettifoss).
Pour le tableau on place en premier le sommet B et en dernier le sommet D entre les deux on place les sommets par ordre alphabétique.

B	G	H	I	L	M	R	V	D
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(B)	∞	∞	∞	∞	∞	50(B)	220(B)	∞
	150(R)	272(R)	∞	∞	∞	50(B)	220(B)	∞
	150(R)	272(R)	∞	291(G)	∞		220(B)	∞
		272(R)	412(V)	291(G)	670(V)		220(B)	∞
		272(R)	412(V)	291(G)	567(H)			∞
			412(V)	291(G)	567(H)			∞
			412(V)		567(H)			∞
					567(H)			617(M)
								617(M)

La distance minimale permettant d'aller du somme B au sommet D est **617 km.**
Le trajet à emprunter est : **B-R-H-M-D**