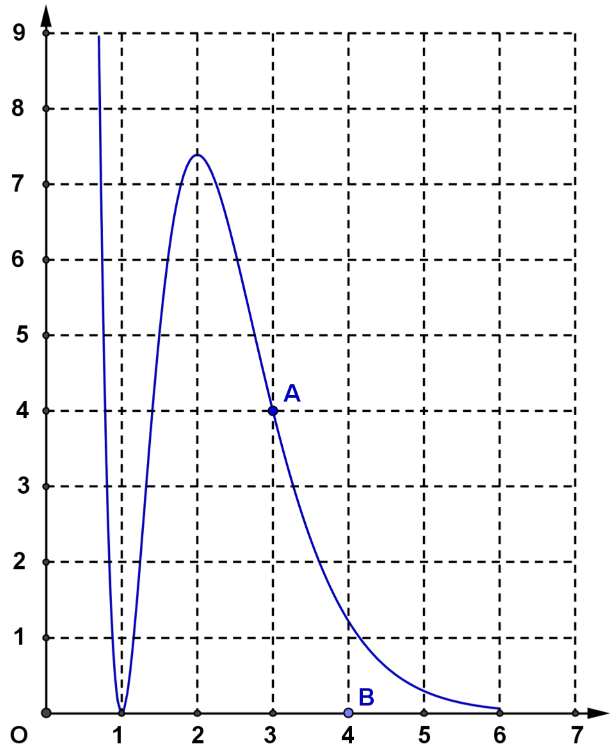
Exercice 4 6 points

Soit f une fonction définie sur l'intervalle [0,7;6] ; on suppose que f est dérivable.

Partie A : Etude graphique

On a représenté la fonction f sur le graphique ci-dessous.



1. La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de f passe par les points $A(3;4)$ et $B(4;0)$.
Déterminer $f'(3)$.

2. D'après le graphique ci-dessus, donner le tableau de signe de f' sur l'intervalle [0,7;6].

Partie B : Etude théorique

On admet que f est définie par :
$f(x)=(x^2-2x+1)e^{-2x+6}$

1. Montrer que $f'(x)=(-2x^2+6x-4)e^{-2x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0,7;6] et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0,7;6].
On ne demande pas de calculer les ordonnées.

3. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-après qui pouront être utilisés sans être démontrés.

L1	f '(x):=(-2x^2+6x-4)*e^(-2x+6) → f '(x)= $(2x^2+6x-4)e^{-2x+6}$
L2	g(x):= Dérivée[f '(x)] → g(x)= $16xe^{-2x+6}+4x^2e^{-2x+6}+14e^{-2x+6}$
L3	Factoriser [g(x)] $\rightarrow 2e^{-2x+6}(2x^2-8x+7)$
L4	Résoudre [g(x)]=0 → $\left\{ x=\frac{-\sqrt{2}+4}{2} ; x=\frac{\sqrt{2}+4}{2} \right\}$
L5	F(x):= Primitive[f(x)] → F(x)= $\frac{1}{4}(-2x^2+2x-1)e^{-2x+6}$

3.a. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.

3.b. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ?
Si oui donner l'abscisse.

3.c On pose I= $\int_3^5 f(x)\,dx$. Calculer la valeur exacte de I puis la valeur arrondie à 10^{-1} .

CORRECTION

Partie A : Etude graphique

1. $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe représentative de la fonction f, soit la droite (AB).

Le coefficient directeur de (AB) est : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-4}{4-3} = -4$.

$f'(3) = -4$

2. Par lecture graphique, f est décroissante sur [0,7;1], croissate sur [1;2] et décroissante sur [2;6], donc f' est négative sur [0,7;1], positive sur [1;2] puis négative sur [2;6].

x	0.7		1		2		6
f '(x)		−	0	+	0	−	

Partie B : Etude théorique

1. $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^{-2x+6}$

$(e^u)' = u' e^u \qquad (e^{-2x+6})' = -2e^{-2x+6} \qquad (x^2 - 2x + 1)' = 2x - 2$

On dérive un produit

$f'(x) = (2x-2)e^{-2x+6} + (x^2 - 2x + 1)(-2e^{-2x+6}) = (2x - 2 - 2x^2 + 4x - 2)e^{-2x+6}$

$f'(x) = (-2x^2 + 6x - 4)e^{-2x+6}$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0,7;6], $e^{-2x+6} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme $T(x) = -2x^2 + 6x - 4$

$\Delta = 36 - 4 \times (-2) \times (-4) = 4 \qquad x' = \dfrac{-6-2}{-4} = 2 \qquad x'' = \dfrac{-6+2}{-4}$

En utilisant le signe d'un trinôme, on détermine le signe de $f'(x)$.

x	0.7		1		2		6
f '(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	f(0.7)	↘	0	↗	e^2	↘	f(6)

$f(1) = 0$ et $f(2) = e^2$

3.a. Le logiciel de calcul formel nous donne $g(x) = f''(x) = e^{-2x+6}(2x^2 - 8x + 7)$.

Le signe de $f''(x)$ est le signe du trinôme $T_1(x) = 2x^2 - 8x + 7$ dont les racines sont :

$x_1 = \dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}$ et $x_2 = \dfrac{\sqrt{2}+4}{2}$

$1 < x_1 < 2$ et $2 < x_2 < 3$

On donne le signe de $f''(x)$ sous laforme d'un tableau.

x	0.7		x_1		x_2		6
f ''(x)		+	0	−	0	+	

donc **f est concave sur l'intervalle** $[x_1;x_2]$.

3.b. Les points d'abscisses x_1 et x_2 sont deux points d'inflexion de la courbe représentative de f.

3.c. Le logiciel de calcul formel nous donne F, définie par $F(x)=\frac{1}{4}(-2x^2+2x-1)e^{-2x+6}$, pour primitive de f sur l'intervalle [0,7;6].

$I=\int_3^5 f(x)\,dx=F(5)-F(3)$

$F(5)=\frac{1}{4}(-50+10-1)e^{-4}=-\frac{41}{4}e^{-4}$

$F(3)=\frac{1}{4}(-18+6-1)e^{0}=-\frac{13}{4}$

$I=-\frac{41}{4}e^{-4}+\frac{13}{4}$ = **3,1** à 10^{-1} près.

Remarque

f est positive sur [3;5], donc I est l'aire(en unité d'aire) de la partie de plan comprise entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=3 et x=5 (partie de plan colorée en jaune sur la figure ci-desous).