

Exercice 2 *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité* **5 points**

Mathieu dispose d'un capital de 20 000 euros qu'il veut placer. Sa banque lui propose de choisir entre deux contrats d'épargne.

Contrat A : le capital augmente chaque année de 4 %.

Contrat B : le capital augmente chaque année de 2,5 % et une prime annuelle fixe de 330 euros est versée à la fin de chaque année et s'ajoute au capital.

On note a_n le capital en euros, acquis au bout de n années si Mathieu choisit le contrat A.

On note b_n le capital en euros, acquis au bout de n années si Mathieu choisit le contrat B.

On a donc $a_0 = b_0 = 20000$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 1,04 a_n$ et $b_{n+1} = 1,025 b_n + 330$.

1. Dans cette question on suppose que Mathieu choisit le contrat A.

1.a. Calculer la valeur, arrondie à l'euro du capital disponible au bout de 10 ans.

1.b. Déterminer le pourcentage d'augmentation du capital entre le capital de départ et celui obtenu au bout de 10 ans. Arrondir le résultat à 1 %.

2. Dans cette question, on suppose que Mathieu choisit le contrat B.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 13200 + b_n$.

2.a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 1,025 et calculer son premier terme u_0 .

2.b. Donner l'expression de u_n en fonction de n .

2.c. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a :

$$b_n = 33200 \times 1,025^n - 13200$$

2.d. Déterminer au bout de combien d'années le capital disponible devient supérieur à 40 000 euros.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables : A est un nombre réel
B est un nombre réel
N est un entier naturel

Traitement : A prend la valeur 20 000
B prend la valeur 20 000
N prend la valeur 0
Tant que $A \leq B$
 A prend la valeur $1,04 \times A$
 B prend la valeur $1,025 \times B + 330$
 N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant que

Sortie : Afficher N

3.a. Le tableau ci-après traduit l'exécution pas à pas de l'algorithme.

Recopier et compléter ce tableau en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.

Les valeurs de A et B seront arrondies à l'unité.

Valeur de A	20000			
Valeur de B	20000			
Valeur de N	0			
Condition $A \leq B$	Vraie			

3.b. Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1. Pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 1,04 a_n$ et $a_0 = 20000$.

1.a. (a_n) est la suite géométrique de raison $q = 1,04$ et de premier terme $a_0 = 20000$.

Pour tout entier naturel n : $a_n = a_0 \times q^n = 20000 \times 1,04^n$.

Pour $n = 10$: $a_{10} = 20000 \times 1,04^{10} = 29605$ à l'unité près.

Le capital disponible au bout de 10 ans est : 29 605€.

1.b. Le pourcentage d'augmentation du capital au bout de 10 ans est égal à :

$$\frac{a_{10} - a_0}{a_0} \times 100 = \frac{29605 - 20000}{20000} \times 100 = \frac{9605}{20000} \times 100 = 48 \text{ à l'unité près.}$$

Le pourcentage d'augmentation du capital entre le capital de départ et le capital au bout de 10 ans est : 48 %.

2. Pour tout entier naturel n :

$$b_{n+1} = 1,025 b_n + 330 \text{ et } b_0 = 20000$$

$$u_n = 13200 + b_n \text{ donc } b_n = u_n - 13200$$

2.a. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 13200 + b_{n+1} = 13200 + 1,025 b_n + 330 = 13530 + 1,025 (u_n - 13200) = 13530 + 1,025 u_n - 1,025 \times 13200$$

$$u_{n+1} = 13530 + 1,025 u_n - 13530 = 1,025 u_n$$

(u_n) est la suite géométrique de raison **1,025** et de premier terme $u_0 = 13200 + b_0 = 33200$.

2.b. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n = 33200 \times 1,025^n.$$

2.c. Pour tout entier naturel n : $b_n = u_n - 13200$ donc $b_n = 33200 \times 1,025^n - 13200$.

2.d. $b_n \geq 40000 \Leftrightarrow 33200 \times 1,025^n - 13200 \geq 40000 \Leftrightarrow 1,025^n \geq \frac{532}{332}$

$\ln$ est une fonction croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\Leftrightarrow \ln(1,025^n) \geq \ln\left(\frac{532}{332}\right) \Leftrightarrow n \times \ln(1,025) \geq \ln\left(\frac{532}{332}\right)$$

$1,025 > 1$ donc $\ln(1,025) > 0$

$$\Leftrightarrow n \geq \ln\left(\frac{532}{332}\right) : \ln(1,025) = 19,01 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

n est un entier naturel donc $n \geq 20$.

Le capital disponible devient supérieur à 40 000€ au bout de 20 ans.

Remarque

$$b_{20} = 41202 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

3.a. En utilisant la calculatrice, on obtient :

Valeur de A	20000	20800	21632	22497	23397	24333	25306
Valeur de B	20000	20830	21681	22553	23447	24363	25302
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6
Condition $A \leq B$	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Fausse

3.b. **La valeur affichée en sortie par cet algorithme est : 6.**

Si le placement est effectué pour une durée inférieure ou égale à 5 ans alors le contrat B est le plus avantageux.

Si le placement est effectué pour une durée supérieure ou égale à 6 ans alors le contrat A est le plus avantageux.