Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour les déplacements entre les principales villes d'une région, les habitants peuvent acquérir soit la carte d'abonnement bus (PassBus), soit la carte d'abonnement train (PassTrain), toutes les deux sont valables un an.
Une étude récente montre que le montre global d'abonnements reste constant dans le temps et que, chaque année, la répartition des abonnements évolue de la manière suivante :
. 10 % des abonnements PassBus sont remplacés par des abonnements PassTrain.
. 15 % des abonnements PassTrain sont remplacés par des abonnements PassBus.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et T où B représente l'état « abonné Passbus » et T représente l'état « PassTrain ».

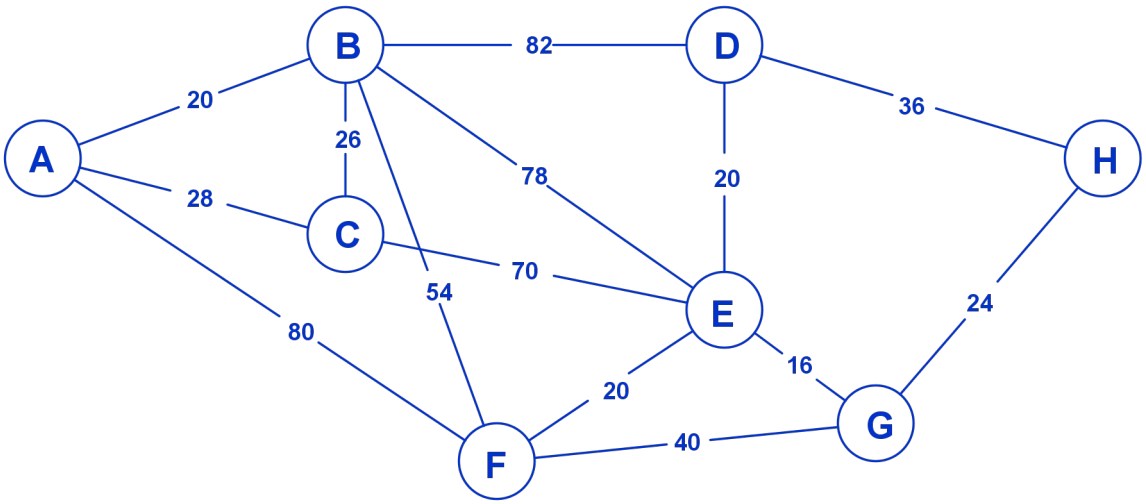
2. Déterminer la matrice de transition de ce graphe en respectant l'ordre B, T des sommets.

3. En 2016, les abonnements PassBus représentaient 25 % de l'ensemble des abonnements, tandis que les abonnements PassTrain en représentaient 75 %.
Quelle sera la part en 2019, des abonnements PassBus dans l'ensemble des abonnements?
Donner le résultat en pourcentage arrondi à 0,1 %.

4. Déterminer l'état stable du graphe probabiliste et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Le réseau ferroviaire de la région est schématisé par le graphe ci-dessous.
Les sommets représentent les villes et les arêtes représentent les voies ferrées.
Sur les arêtes du graphe sont indiquées les distances exprimées en kilomètre entre les villes de la région.



Déterminer en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet le plus court pour aller de la ville A à la ville H.
Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

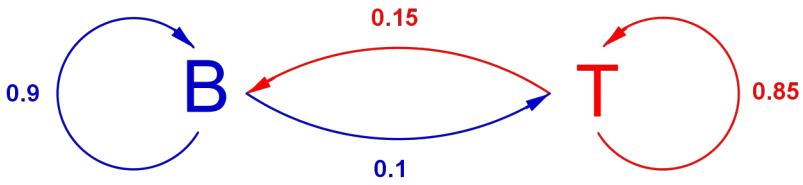
CORRECTION

1. Les sommets du graphe probabiliste sont B et T.

. Chaque année, 10 % des abonnements PassBus sont remplacés par des abonnements PassTrain donc 90 % des abonnements PassBus restent des abonnements PassBus
Conséquences
Le poids de l'arête BT est 0,1.
Le poids de l'arête BB est 0,9.

. Chaque année, 15 % des abonnements PassTrain sont remplacés par des abonnements PassBus donc 85 % des abonnements PassTrain resrent des abonnements PassTrain.
Conséquences
Le poids de l'arête TB est 0,15.
Le poids de l'arête TT est 0,85.

. On obtient le graphe probabiliste suivant



2. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique : B puis T.
Dans cet exercice , on utilisera les matrices lignes.

La matrice de transition de ce graphe est la matrice $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête BB soit 0,9
m_{12} est le poids de l'arête BT soit 0,1
m_{21} est le poids de l'arête TB soit 0,15
m_{22} est le poids de l'arête TT soit 0,85

$M=\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$

3. On notera pour tout entier naturel n, $P_n=\begin{pmatrix} b_n & t_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste de l'année 2016+n.
En 2016, les abonnés PassBus représentent 25 % de l'ensemble des abonnements, tandis que les abonnements PassTrain en représentent 75 % donc $P_0=\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$.
Pour tout entier naturel n : $P_{n+1}=P_n M$ et $P_n=P_0 M^n$
$2019=2016+3$
$P_3=P_0 M^3$
En utilisant la calculatrice, on obtient :
$M^3=\begin{pmatrix} 0,7688 & 0,2313 \\ 0,3469 & 0,9631 \end{pmatrix}$
$P_3=\begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} M^3=\begin{pmatrix} 0,4523 & 0,5477 \end{pmatrix}$;
La part, en 2019, des abonnements PassBus sera de 45,2 % à 0,1 % près.

4. $P=\begin{pmatrix} b & t \end{pmatrix}$ est l'état stable si et seulement si $PM=P$ et $b+t=1$.

$PM=\begin{pmatrix} b & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,9\,b+0,5\,t & 0,1\,b+0,85\,t \end{pmatrix}$

$PM=P \Leftrightarrow \begin{cases} 0,9\,b+0,15\,t=b \\ 0,1\,b+0,85\,t=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,1\,b+0,15\,t=0 \\ 0,1\,b-0,15\,t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,1\,b-0,15\,t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1,5\,t \end{cases}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$$\begin{cases} PM=P \\ b+t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1,5t \\ b+t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1,5t \\ 2,5t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1,5t \\ t=\dfrac{1}{2,5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1,5t \\ t=0,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0,6 \\ t=0,4 \end{cases}$$

Conséquences

L'état stable du graphe probabiliste est $(0,6 \quad 0,4)$.

À long terme 60 % des abonnés seront abonnés au PassBus et 40 % au PassTrain.

Partie B

On utilise l'algorithme de Dijkstra

A	B	C	D	E	F	G	H
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	20(A)	28(A)	∞	∞	80(A)	∞	∞
	20(A)	28(A)	102(B)	98(B)	74(B)	∞	∞
		28(A)	102(B)	98(B)	74(B)	∞	∞
			102(B)	94(F)	74(B)	114(F)	∞
			102(B)	94(F)		110(E)	∞
			102(B)			110(E)	138(D)
						110(E)	134(G)
							134(G)

Le trajet le plus court est A-B-F-E-G-H.

La longueur de ce trajet est : 134 kilomètres.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés