Exercice 3 5 points

Une entreprise d'élevage de poissons en bassin a constaté qu'une partie de sa production est infectée par une nouvelle bactérie.
Un laboratoire a réalisé deux prélèvements, l'un au mois de janvier et l'autre au moins de juin, afin d'étudier l'évolution de l'infection.
Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

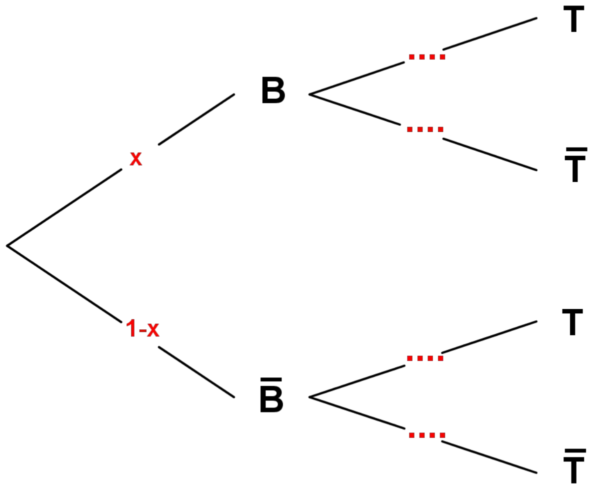
Partie A

Au mois de janvier, lors du premier test, le laboratoire a prélevé au hasard 1 000 poissons parmi l'ensemble des poissons du bassin.
La fréquence de poissons infectés par la bactérie dans cet échantillon est $f_1 = 5\ \%$
Au mois de juin, le laboratoire a prélevé de nouveau 1 000 poissons.
Pour ce second test, la fréquence de poissons infectés est $f_2 = 10\ \%$.
La fréquence des poissons infectés dans les deux échantillons ayant doublé en cinq mois, le laboratoire préconise d'arrêter la vente des poissons de l'entreprise.
On note p_1 la proportion des poissons infectés parmi tous les poissons du bassin au mois de janvier et p_2 la proportion de poissons infectés parmi tous les poissons du bassin au mois de juin.

1. Déterminer le intervalles de confiance au niveau de confiance 95 % de la proportion p_1 et de la proportion p_2.
On arrondira les bornes des intervalles à 10^{-3}.
2. Quel argument pourrait donner l'entreprise pour éviter l'arrêt de la vente ?

Partie B

Pour déterminer la fréquence de poissons infectés dans un prélèvement, le laboratoire dispose d'un test de dépistage dont les résultats sont les suivants :
. sur des poissons infectés par la bactérie, le test est positif dans 60 % des cas.
. sur des poissons non infectés par la bactérie, le test est positif dans 10 % des cas.
Pour un poisson prélevé au hasard, on note :
. B l'événement : « le poisson est infecté par la bactérie » ;
. T l'événement : « le test du poisson est positif » ;
. $\overline{B}$ et $\overline{T}$ les événements contraires de B et T.
On note x la probabilité qu'un poisson soit infecté par la bactérie.
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré traduisant cette situation.



2.a. Démontrer que $P(T)=0,5x+0,1$.

2.b. Le laboratoire a constaté que 12,5 % des poissons d'un prélèvement on eu un test positif.
Quelle estimation de la proportion de poissons infectés le laboratoire va-t-il proposer pour ce prélèvement ?

Partie C

Un traitement antibiotique permet de guérir les poissons infectés par la bactérie.
Le temps de guérison d'un poisson infecté, exprimé en jours, peut-être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu=21$ et d'écart-type $\sigma=5$.

Les résultats seront arrondis au millième

1. Déterminer la probabilité $P(14\leqslant X\leqslant 28)$.

2. Déterminer la probabilité qu'un poisson infecté ne soit pas encore guéri après 5 semaines de traitement antibiotique.

CORRECTION

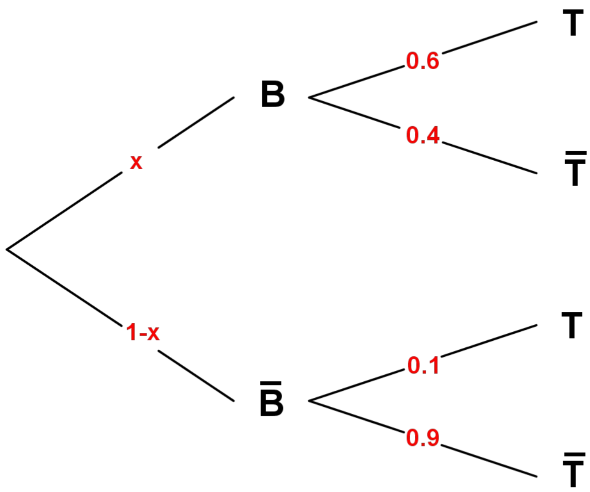
Partie A

1. $f_1 = 5\ \%$ la proportion relevée dans l'échantillon de taille 1 000 est : $p_1' = 0{,}05$.
$n = 1000 \geqslant 30 \qquad np_1' = 50 \geqslant 5 \qquad n(1-p_1') = 950 \geqslant 5$
L' intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % de la proportion p_1 est :
$$I_1 = \left[p_1' - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p_1' + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}05 - \frac{1}{\sqrt{1000}} ; 0{,}05 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [0{,}018 ; 0{,}082]$$
. $f_2 = 10\ \%$ la proportion relevée dans l'échantillon de taille 1 000 est : $p_2' = 0{,}1$.
$n = 1000 \geqslant 30 \qquad np_2' = 100 \geqslant 5 \qquad n(1-p_2') = 900 \geqslant 5$
L'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion p_2' est :
$$I_2 = \left[p_2' - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p_2' + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}1 - \frac{1}{\sqrt{1000}} ; 0{,}1 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [0{,}068 ; 0{,}132].$$

2. Les intervalles I_1 et I_2 ne sont pas disjoints : $I_1 \cap I_2 = [0{,}068 ; 0{,}082]$.
L'entreprise peut argumenter qu'il est possible que p_1 et p_2 appartiennent à [0,068;0,082] et p_2 peut-être inférieure à p_1 et affirmer qu'il est possible que la proportion des poissons infectés à diminuée en cinq mois.
Cette affirmation pourrait éviter l'arrêt de la vente.

Partie B

1. Sur les poissons infectés par la bactérie, le test est positif dans 60 % des cas.
Conséquences
$P_B(T) = 0{,}6$ et $P_B(\bar{T}) = 1 - P_B(T) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
. Sur les poissons non infectés par la bactérie, le test est positif dans 10 % des cas.
Conséquences
$P_{\bar{B}}(T) = 0{,}1$ et $P_{\bar{B}}(\bar{T}) = 1 - P_{\bar{B}}(T) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$
. On obtient l'arbre pondéré suivant :



2.a. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales.
$P(T) = P(B \cap T) + P(\bar{B} \cap T) = P(B) \times P_B(T) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(T)$
$P(T) = x \times 0{,}6 + (1-x) \times 0{,}1 = 0{,}6x + 0{,}1 - 0{,}1x$
P(T)=0,5x+0,1

2.b. Le laboratoire a constaté que P(T)=0,125.

$0{,}5x + 0{,}1 = 0{,}125 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}5x = 0{,}025 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{0{,}025}{0{,}5} = 0{,}05.$

L'estimation de la proportion de poissons infectés que le laboratoire va proposer est : 0,05 soit 5 %.

Partie C

1. En utilisant la calculatrice :
$P(14 < X < 28) = 0{,}838$.

2. On nous demande de calculer $P(35 < X)$
5 semaines = 35 jours
En utilisant la calculatrice
$P(35 < X) = 0{,}003$.