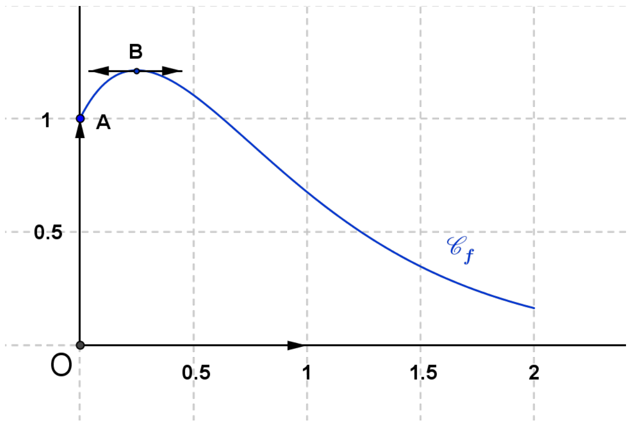
Exercice 4 — 6 points

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère orthonormal, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle [0;2].
On suppose que f est deux fois dérivable et on note f' la fonction dérivée de f.
On sait que :
. Le point $A(0;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0,25 est parallèle à l'axe des abscisses.



Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On suppose que la fonction f est définie sur l'intervalle [0;2] par $f(x)=(ax+b)e^{-2x}$ où a et b sont deux réels à déterminer.

1. En utilisant le graphique et les données de l'énoncé, déterminer f(0) et $f'(0{,}25)$.

2. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et b.

3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs des réels a et b.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle [0;2] par :

$$f(x)=(4x+1)e^{-2x}$$

On admet par ailleurs que $f'(x)=(2-8x)e^{-2x}$ et $f''(x)=(16x-12)e^{-2x}$ où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle [0;2].

1. Étudier le signe de f' sur [0;2] puis eb déduire les variations de f sur [0;2].

2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet, sur l'intervalle [0;2], un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

3. Soit F la fonction définie sur l'intervalle [0;2] par $F(x)=(-2x-1{,}5)e^{-2x}$.
3.a. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur [0;2].
3.b. En déduire l'aire exacte $\mathscr{A}$, en unité d'aire, du domaine D du plan situé entre $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x=2.
3.c. Déterminer la valeur moyenne, arrondie à 10^{-1}, de la fonction f sur l'intervalle [0;2].

CORRECTION

Partie A

1. A(0;1) appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ donc **f'0) = 1**.
B(0,25;f(0,25)) appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en B est horizontale donc :
f' **(0,25)=0.**

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;2], $f(x)=(ax+b)e^{-2x}$.
$(e^u)'=u'e^u$ et $(e^{-2x})'=-2e^{-2x}$.
On dérive un produit
$f'(x)=ae^{-2x}+(ax+b)(-2e^{-2x})=ae^{-2x}+(-2ax-2b)e^{-2x}=(-2ax+a-2b)e^{-2x}$

3. $f(0)=be^0=b$ f(0)=1 $\Leftrightarrow$ **b=1.**
$f'(x)=(-2ax+a-2)e^{-2x}$
$f'(0,25)=(-0,5a+a-2)e^{-0,5}=(0,5a-2)e^{-0,5}$
$e^{-0,5}\neq 0$ donc $f'(0,25)=0 \Leftrightarrow$ 0,5a-2=0 $\Leftrightarrow$ 0,5a=2 $\Leftrightarrow$ $a=\dfrac{2}{0,5}$ $\Leftrightarrow$ **a=4.**

Conclusion
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;2], $f(x)=(4x+1)e^{-2x}$;

Partie B

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;2] :
$f(x)=(4x+1)e^{-2x}$ $f'(x)=(2-8x)e^{-x}$ $f''(x)=(16x-12)e^{-2x}$

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;2], $e^{-2x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de 2-8x.

$2-8x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}=0,25$

$2-8x>0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{8}>x \Leftrightarrow x<0,25$

$2-8x<0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{8}<x \Leftrightarrow 0,25<x$

Conséquences
f est croissante sur [0;0,25] et f est décroissante sur [0,25;2].

2. Pour déterminer les points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle [0:2], on détermine le signe de la fonction dérivée seconde de f sur cet intervalle.
$f''(x)=(16x-12)e^{-2x}$ donc le signe de $f''(x)$ est le signe de $16x-12$.

$16x-12=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}=0,75$

$16x-12>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{12}{16}=0,75$

$16x-12<0 \Leftrightarrow x<\dfrac{12}{16}=0,75$

x	0		0.75		2
16x-12		−	0	+	
convexité de f		concave		convexe	

Le point I de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0,75 est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;2], $F(x)=(-2x-1{,}5)e^{-2x}$

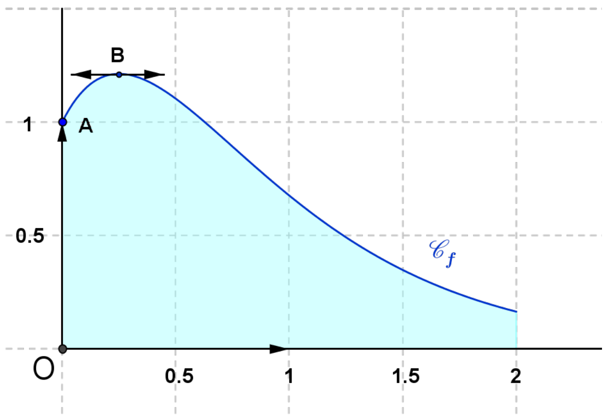
3.a. F est la primitive de f sur [0;2] si et seulement si $F'(x)=f(x)$

$F'(x)=-2e^{-2x}+(-2x-15)(-2e^{-2x})=-2e^{-2x}+(4x+3)e^{-2x}=(4x+1)e^{-2x}=f(x)$

<u>Conclusion</u>

F est une primitive de f sur [0;2].

3.b.



Le domaine D est la partie de plan colorée en vert sur la figure ci-dessus.
f est continue et positive sur [0;2] donc l'aire, en unité d'aire, du domaine D du plan situé entre $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées et la droite d'équation x=2, est :

$\mathscr{A} = \int_0^2 f(x)\,dx=(2)-F(0)=-5{,}5e^{-4}-(-1{,}5) =$ **$1{,}5 - 5{,}5e^{-4}$ U.A.**

3.c. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0;2]est :

$m = \frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\mathscr{A}= \frac{1}{2}(1{,}5-5{,}5e^{-4}) =$ **0,7 à 10^{-1} près.**