Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un particulier possède une piscine et décide de s'équiper d'un système automatique de remplissage pour tenir compte de l'évaporation pendant la période estivale. Sur un site spécialisé, il apprend que les conditions climatiques dans sa région pen dant cette période sont telles qu'il peut prévoir une évaporation quotidienne de 4 % de la quantité d'eau. Il décide alors de régler son système de remplissage automatique à un apport de 2 m^3 d'eau par jour.
Le premier jour de la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage, la piscine contient $75\,m^3$.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le volume d'eau dans la piscine, exprimée en mètre cube (m^3) , n jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.
Ainsi, $u_0=75$.

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. Justifier que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
Est-elle géométrique ?

3. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}96\times u_n+2$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=u_n-50$.
4.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme v_0 .
4.b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
4.c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n=25\times 0{,}96^n+50$
4.d. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexe de l'exercice.

5. Si le volume d'eau dans la piscine est inférieur à 65 m^3 , le niveau de l'eau est insuffisant pour alimenter les pompes de filtration ce qui risque de les endommager. Pour connaître le nombre de jours pendant lesquels le niveau d'eau reste suffisant sans risque de panne en conservant ce réglage, on construit l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel	**L1**
	u est un nombre réel	**L2**
Traitement :	n prend la valeur 0	**L3**
	u prend lka valeur 75	**L4**
	Tant que u	**L5**
	u prend la valeur	**L6**
	n prend la valeur n+1	**L7**
	Fin Tant que	**L8**
Sortie :	Afficher n	**L9**

5.a. Recopier et compléter les lignes L5 et L6 de cet algorithme.
5.b. Quel est le résultat affiché en sortie de cet algorithme ?
5.c. Pendant combien de jours le niveau de l'eau est-il suffisant si on conserve ce réglage ?

CORRECTION

1. L'évaporation le premier jour est de : $75\times\frac{4}{100}=3\ (m^3)$.

Donc $u_1=75-3+2=$ **74** m^3

. L'évaporation le deuxième jour est de : $74\times\frac{4}{100}=2{,}96\ m^3$

Donc $u_2=75-2{,}96+2=$ **73,04** m^3

2. $u_1-u_0=1$ et $u_2-u_1=0{,}96\neq 1$

La suite (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

. $\frac{u_1}{u_0}=\frac{74}{75}$ et $\frac{u_2}{u_1}=\frac{73{,}04}{74}\neq\frac{74}{75}$

La suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

3. u_n est le volume d'eau dans la piscine (en m^3), n jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.

u_{n+1} Est le volume d'eau dans la piscine (en m^3), n+1 jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.

L'évaporation le $(n+1)^{\text{ième}}$ est de : $u_n\times\frac{4}{100}=0{,}04\times u_n$ et on ajoute 2 (m^3)

$u_{n+1}=u_n-0{,}04\,u_n+2=0{,}96\times u_n+2$.

4. Pour tout entier naturel n : $v_n=u_n-50$ donc $u_n=v_n+50$.

4.a. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-50=0{,}96\times u_n+2-50=0{,}96\times(v_n+50)-48=0{,}96\,v_n+48-48=0{,}96\,v_n$

$v_0=u_0-50=75-50=25$

(v_n) **est la suite géométrique de premier terme $v_0=25$ et de raison $q=0{,}96$.**

4.b. Pour tout enier naturel n : $v_n=v_0\times q^n=25\times 0{,}96^n$.

4.c. Pour tout entier naturel n : $u_n=v_n+50=25\times 0{,}96^n+50$.

4.d. $0<0{,}96<1$ donc $\lim_{n\to+\infty}0{,}96^n=0$ et $\lim_{n\to+\infty}u_n=$ **50.**

À long terme, en conservant le même réglage, le volume d'eau de la piscine sera voisin de 50 m^3.

5.a. **L5** Tant que $u\geqslant$ **65**

L6 u prend la valeur **0,96u+2**

5.b. Si on utilise l'algorithme et la calculatrice on obtient **n=13.**

L'algorithme affiche le nombre de jours à partir du quel le volume d'eau devient insuffisant.

5.c. Si on utilise le résultat précédent on obtient **12 jours.**

Sinon on résout l'inéquation :

$$u_n\geqslant 65 \iff 25\times 0{,}96^n+50\geqslant 65 \iff 0{,}96^n\geqslant\frac{15}{25}=\frac{3}{5}=0{,}6$$

ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$$\iff \ln(0{,}96^n)\geqslant\ln(0{,}6) \iff n\times\ln(0{,}96)\geqslant\ln(0{,}6)$$

0<0,96<1 donc ln(0,96)<0

$$\iff n\leqslant\frac{\ln(0{,}96)}{\ln(0{,}6)}=12{,}51 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Donc **n=12.**