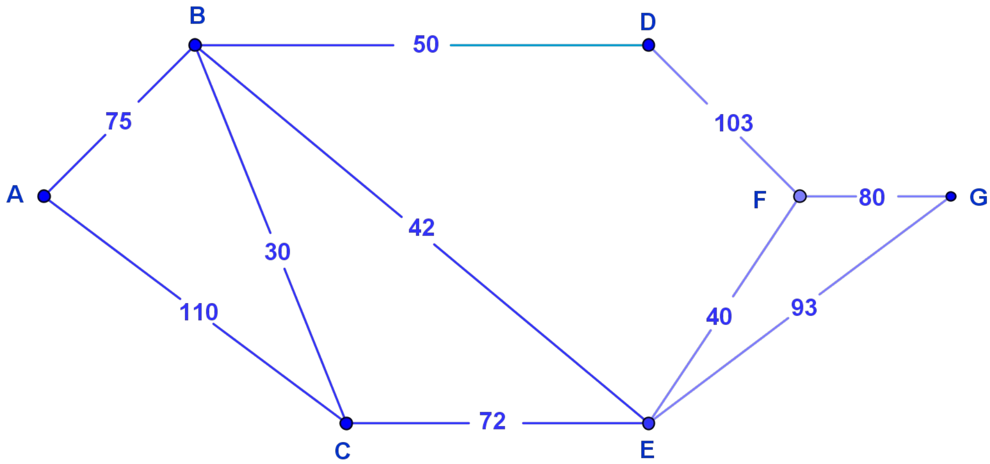
Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le graphe ci-dessous représente le plan d'un centre de vacances. Les arêtes représentent les allées et les sommets, les carrefours. On a indiqué sur chaque arête la longueur en mètre des allées entre deux carrefours.



1. Le service d'entretien doit nettoyer toutes les allées. En partant cu carrefour C , peut-on nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles ? Justifier la réponse.

2. Existe-il un parcours permettant de nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles et de revenir au point de départ ? Justifier la réponse.

3. Déterminer le trajet le plus court pour aller du carrefour A au carrefour G.

Partie B

Dans le centre de vacances, les vacanciers peuvent, chaque jour, déjeuner au restaurant du centre ou à l'extérieur. On contate chaque jour :
. 5 % des vacanciers ayant déjeuné au centre de vacances ne se réinscrivent pas pour le lendemain ;
. 20 % des vacanciers ayant déjeuné à l'extérieur s'inscrivent pour déjeuner au centre de vacances le lendemain.
On note D l'état « Déjeuner au centre de vacances » et E l'événement « Déjeuner à l'extérieur ».

1. Construire un graphe modélisant cette situation.

2. Écrire la matrice de transition de ce graphe, les sommets sont rangés selon l'ordre alphabétique.

3. Le premier jour, le quart des vacanciers a déjeuné au centre des vacances. Quel pourcentage de vacanciers déjeunera au centre de vacances le deuxième jour ? Le cinquième jour ?

4. L'état $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ est-il stable ?

5. Peut-on affirmer qu'à terme, si les comportements des vacanciers restent les mêmes, 75 % des vacanciers prendront leur déjeuner au centre ?

CORRECTION

Partie A

1. On nous demande si le graphe admet **une chaîne eulérienne** commençant par C.

- **Théorème d'Euler**
  Un graphe connexe admet au moins une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
- Remarque
  Si le nombre de sommets de degré impair est 2 alors les deux extrémités d'une chaîne eulérienne sont ces deux sommets.
- Détermination du degré de chaque sommet (on donne les résultats sous forme de tableau)

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	2	4	3	2	4	3	2

- Conclusion
  Il existe une chaîne eulérienne partant de C.
  Exemple
  C-A-B-C-E-B-D-F-E-G-F

2. On nous demande s'il existe **un cycle eulérien.**
Théorème d'Euler
Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0.
Il y a deux sommets de degré impair.
Conclusion
Il n'existe pas de parcours permettant de nettoyer toutes les allées en passant une et une seule fois par chacune d'elles et de revenir au point de départ.

3. Pour déterminer le plus court chemin pour aller du carrefour A au carrefour G, on utilise l'algorithme de DIJKSTRA.

A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	75(A)	110(A)	∞	∞	∞	∞
	75(A)	105(B)	125(B)	117(B)	∞	∞
		105(B)	125(B)	117(B)	∞	∞
			125(B)	117(B)	157(E)	210(E)
			125(E)		157(E)	210(E)
					157(E)	210(E)
						210(E)

Le plus court chemin pour aller du carrefour A au crrefour G est : A-B-E-G.
La longueur de ce chemin est 210 m.

Partie B

1. Les deux sommets du graphe sont : D et E.

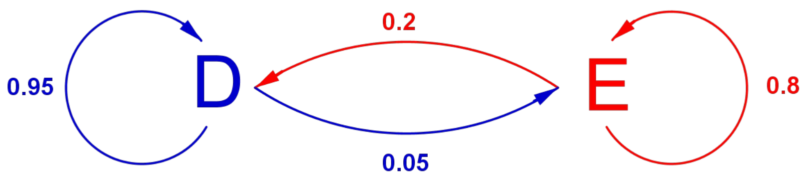
- 5 % des vacanciers ayant déjeuné au centre de vacances ne se réinscrivent pas pour le lendemain.
  Conséquences

Le poids de l'arête DE est 0,05.
Le poids de l'arête DD est : 1-0,05=0,95.

- 20 % des vacanciers ayant déjeuné à l'extérieur s'inscrivent pour déjeuner au centre le lendemain.

Conséquences
Le poids de l'arête ED est : 0,2.
Le poids de l'arête EE est : 1-0,2=0,8

- On obtient le graphe probabiliste suivant :



2. Dans cet exercice, on utilise les matrices lignes.
Les sommets du graphe sont rangés dans l'ordre alphabétique.

La matrice de transitionde ce graphe est : $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête DD : 0,95
m_{12} est le poids de l'arête DE : 0,05
m_{21} est le poids de l'arête ED : 0,2
m_{22} est le poids de l'arête EE : 0,8

$M=\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

3. Le premier jour, le quart des vancanciers a déjeuné au centre, soit 25 % des vacanciers ont déjeuné au centre le premier jour.
Pour tout entier naturel n non nul, on note d_n la probabilité qu'un vacancier choisi au hasard déjeune au centre le $n^{\text{ième}}$ jour et on note e_n la probabilité qu'un vacancier, choisi au hasard, déjeune à l'extérieur le $n^{\text{ième}}$ jour. On note aussi $P_n=(d_n \quad e_n)$ l'état probabiliste le $n^{\text{ième}}$ jour.

$P_1=(0{,}25 \quad 0{,}75)$

Pour tout entier naturel n :

$P_{n+1}=P_nM=P_1M^n$

$P_2=(d_2 \quad e_2)=P_1M=(0{,}25 \quad 0{,}75)\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}=(0{,}2375+0{,}15 \quad 0{,}0125+0{,}6)$

$P_2=(0{,}3875 \quad 0{,}6125)$

Le deuxième jour, 38,75 % des vacanciers déjeuneront au centre.

$P_5=P_1M^4$

On calcule M^4 en utilisant la calculatrice, on arrondit les résultats à 10^{-4} près.

$M^4=\begin{pmatrix} 0{,}8633 & 0{,}1367 \\ 0{,}5469 & 0{,}4531 \end{pmatrix}$

On obtient $P_5=(0{,}6260 \quad 0{,}3740)$.

Le cinquième jour, 62,60 % des vacanciers déjeuneront au centre.

4. $P=(x \quad y)$ est l'état stable si est seulement si $x+y=1$ et $P=PM$

$0{,}5+0{,}5=1$ et $(0{,}5 \quad 0{,}5)\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}=(0{,}475+0{,}1 \quad 0{,}025+0{,}4)=(0{,}575 \quad 0{,}425)$

donc $(0{,}5 \quad 0{,}5)$ n'est pas l'état stable.

5. On détermine l'état stable

$(x \quad y)=(x \quad y)\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}=(0{,}95\,x+0{,}2\,y \quad 0{,}05\,x \quad 0{,}8\,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0{,}95\,x+0{,}2\,y \\ y=0{,}05\,c+0{,}8\,y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}05\,x-0{,}2\,y=0 \\ 0{,}05\,x-0{,}2\,y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \{0{,}05\,x-0{,}2\,y=0 \Leftrightarrow \{5\,x-20\,y=0 \Leftrightarrow \{x-4\,y=0$

et $x+y=1$ on obtient $5\,y=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{5}=0{,}2$ et $x=1-0{,}2=0{,}8$.

L'état stable est : $\mathrm{P}=(0{,}8 \quad 0{,}2)$

À long terme, le poucentage des vacanciers déjeunant au centre sera voisin de 80 %.

Conséquence

Si les comportements des vacanciers restent les mêmes alors 75 % des vacanciers prendront leur déjeuner au centre.

Remarque

En utilisant la calculatrice on obtient, 74,49 % des vacanciers qui prendront leur déjeuner au centre le dixième jour et 75,87 % des vacanciers prendront leur déjeuner au centre le onzième jour.