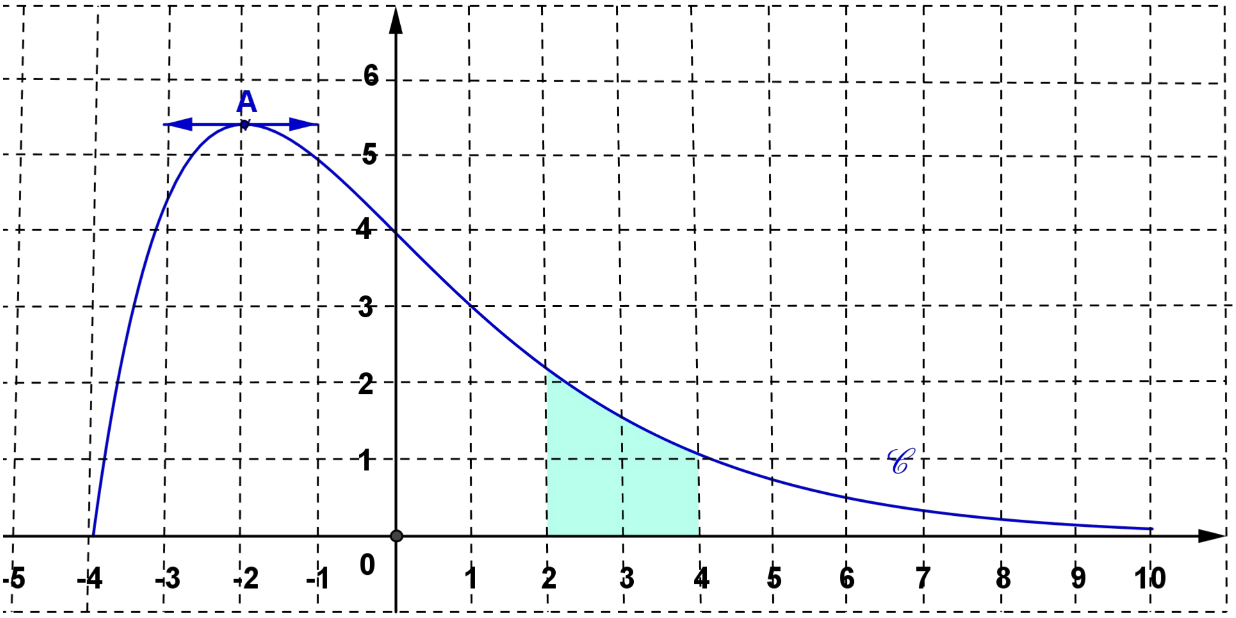
Exercice 3 7 points

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle [-4;10].
On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses.
Le domaine S coloré sur la figure est le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équationx=2 et la droite d'équation x=4.



Partie A

1. Déterminer, en la justifiant, la valeur de $f'(-2)$.
2. Par une lecture graphique, quel semble être le signe de $f'(4)$.
3. Déterminer, par une lecture graphique, un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire du domaine S coloré sur la figure.

Partie B

la fonction f précédente est définie sur l'intervalle [-4;10] par $f(x)=(x+4)e^{-0,5x}$.

1.a. Montrer que $f'(x)=(-0,5x-1)e^{-0,5x}$

1.b. Ètudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [-4;10].

1.c. Montrer que sur l'intervalle [1;6] l'équation $f(x)=1,5$ admet une unique solution.
On notera α cette unique solution.

1.d. Donner une valeur approchée à 10^{-3} de α.

2. On admet que la dérivée seconde de f est définie par $f''(x)=0,25xe^{-0,5x}$

2.a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle [-4;10].

2.b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion I dont on calculera les coordonnées.

3.a. On considère la fonction F définie par $F(x)=(-2x-12)e^{-0,5x}$. Comment peut-on montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle [-4;10]. *On ne demande pas d'effectuer cette vétication.*

3.b. Calculer $S=\int_0^4 f(x)\,dx$.

On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

CORRECTION

Partie A

1. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est égal à 0, $f'(-2)=0$ **.**

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4 est négatif .
Le signe de $f'(4)$ est donc le signe -.

3. L'aire S (en unités d'aire) du domaine plan coloré est comprise entre 3 et 4 : $3\leqslant S\leqslant 4$ **.**

Partie B

1.a. $(e^u)'=u'e^u$ $\quad (e^{-0,5x})'=-0,5e^{-0,5x}$
On dérive un produit.
$f'(x)=1\times e^{-0,5x}+(x+4)\times(-0,5e^{-0,5x})=1\times e^{-0,5x}+(-0,5x-2)e^{-0,5x}=(-0,5x-1)e^{-0,5x}$.

1.b. Pour tout nombre réel x : $e^{-0,5x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de (-0,5x-1) sur [-4;10].

$-0,5x-1\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad -0,5x\geqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad x\leqslant -\dfrac{1}{0,5}=-2$

$-0,5x-1<0 \quad\Leftrightarrow\quad x>-2$

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau

x	-4		-2		10
f'(x)		+	0	–	
f(x)	0	↗	2e	↘	$14e^{-5}$

1.c. f est continue est strictement décroissante sur [1;6]
$f(1)=5e^{-0,5}=3,03$ à 10^{-2} près, $f(6)=10e^{-3}=0,50$ à 10^{-2} près
1,5 appartient à l'intervalle [f(6);f(1)]
Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation $f(x)=1,5$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle [1;6].

1.d. En utilisant la calculatrice :

$f(3)=1,562$ à 10^{-3} près $\qquad f(4)=1,082$ à 10^{-3} près

$3<\alpha<4$

$f(3,1)=1,507$ à 10^{-3} près $\qquad f(3,2)=1,454$ à 10^{-3} près

$3,1<\alpha<3,2$

$f(3,11)=1,502$ à 10^{-3} près $\qquad f(3,12)=1,496$ à 10^{-3} près

$3,11<\alpha<3,12$

$\alpha=3,11$ **à** 10^{-2} **près**

2. On admet que la fonction dérivée seconde de f est définie par $f''(x)=0,25xe^{-0,5x}$
On étudie le signe de $f''(x)$ soit le signe de (0,25x) sur l'intervalle [-4;10].
On donne les résultats sous forme de tableau.

x	-4		0		10
f''(x)		–	0	+	
convexité de f		f est concave		f est convexe	

2.b. f est deux fois dérivable sur [-4;10]

$f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$

En changeant de signe donc le point I d'abscisse 0 est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

3.a. F est une primitive de f sur [-4;10] si et seulement si pour tout nombre réel x de l'intervalle [-4;10], on a : $F'(x)=f(x)$.

3.b. f est positive sur [2;4] donc l'aire (en unités d'aire) du domaine coloré est : S= $\int_2^4 f(x);dx$.

$S=F(4)-F(2)=-20e^{-2}+16e-1$ U.A.

S = 3,18 U.A. au centième près.