

Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos. La municipalité souhaite être informée sur le nombre de vélos en circulation et le coût engendré.

Le responsable du service de location de vélos constate que, chaque année, 20 % des vélos sont devenus inutilisables car perdus, volés ou détériorés. Le budget alloué au service lui permet de racheter 30 vélos par an.

Le 1^{er} janvier 2017, le parc contient 200 vélos utilisables.

On modélise l'évolution du nombre de vélos utilisables par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n , u_n est le nombre de vélos le 1^{er} janvier de l'année 2017+n.

Ainsi $u_0=200$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=0,8 \times u_n + 30$.

1.a. Justifier le coefficient 0,8 dans l'expression de u_{n+1} en fonction de n .

1.b. Combien y aura-t-il de vélos dans ce parc au 1^{er} janvier 2018 ?

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 150$.

2.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0 .

2.b. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n .

2.c. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 50 \times 0,8^n + 150$.

2.d. La municipalité a décidé de maintenir ce service de location tant que le nombre de vélos reste supérieur à 160.

En quelle année le service de location s'arrêtera-t-il ?

3. Pour aider à maintenir le service de location, la municipalité a obtenu une subvention de la région qui sera versée de 2017 inclus à 2025 inclus. Par commodité, on suppose qu'elle est versée pour chaque année le 1^{er} janvier de 2017 inclus à 2025 inclus.

Cette subvention s'élève à 20 euros par vélo disponible à la location.

3.a. Justifier que la somme des subventions reçues pour les deux premières années s'élève à 7 800 euros.

3.b. Déterminer la somme totale perçue grâce à cette subvention du 1^{er} janvier 2017 au 1^{er} janvier 2025.

CORRECTION

1.a. L'exercice précise : « chaque année, 20 % des vélos sont devenus inutilisables car perdus, volés ou déteriorés

u_n est le nombre de vélos au 1^{er} janvier 2017+n.

Au 1^{er} janvier 2017+(n+1) il ne reste que $u_n - \frac{20}{100}u_n = u_n - 0,2u_n = 0,8u_n$ auquel on ajoute 30 vélos.

1.b. Au 1^{er} janvier 2018=2017+1, il y a u_1 vélos.

$$u_1 = 0,8 \times u_0 + 30 = 0,8 \times 200 + 30 = 160 + 30 = \mathbf{190}.$$

2. Pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_n - 150 \text{ donc } u_n = v_n + 150$$

2.a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 150 = 0,8u_n + 30 - 150 = 0,8(v_n + 150) - 120 = 0,8v_n + 120 - 120 = 0,8v_n$$

(v_n) est la suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 150 = 200 - 150 = 50$

2.b. Pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n = 50 \times 0,8^n$$

2.c. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = v_n + 150 = 50 \times 0,8^n + 150$$

$$\mathbf{2.d.} \quad u_n < 160 \Leftrightarrow 50 \times 0,8^n + 150 < 160 \Leftrightarrow 50 \times 0,8^n < 10 \Leftrightarrow 0,8^n < \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0,2$$

ln est une fonction strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln(0,8^n) < \ln(0,2) \Leftrightarrow n \times \ln(0,8) < \ln(0,2)$$

$0 < 0,8 < 1$ donc $\ln(0,8) < 0$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)} = 7,21 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

n est un entier naturel donc $n \geq 8$.

Le service de location s'arrêtera en 2017+8= 2025.

3.a. Au 1^{er} janvier 2017, il y a 200 vélos, la région versera $20 \times 200 = 4000$ €.

Au 1^{er} janvier 2018, il y a 190 vélos, la région versera $20 \times 190 = 3800$ €.

Donc pour les deux premières années la somme des subventions reçues est : 4000+3800= 7800 €.

3.b. On détermine le nombre de vélos du 1^{er} janvier 2019 au 1^{er} janvier 2025.

Le nombre de vélos au 1^{er} janvier 2017+n est $u_n = 50 \times 0,8^n + 150$, on arrondit à l'unité près.

Année	Nombre de vélos	Subvention
2017	200	4 000
2018	190	3 800
2019	182	3 640
2020	176	3 520
2021	170	3 400
2022	166	3 320
2023	163	3 260
2024	160	3 200
2025	158	3 160
TOTAL		31 300

La somme totale perçue est : 31 300 €.