Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

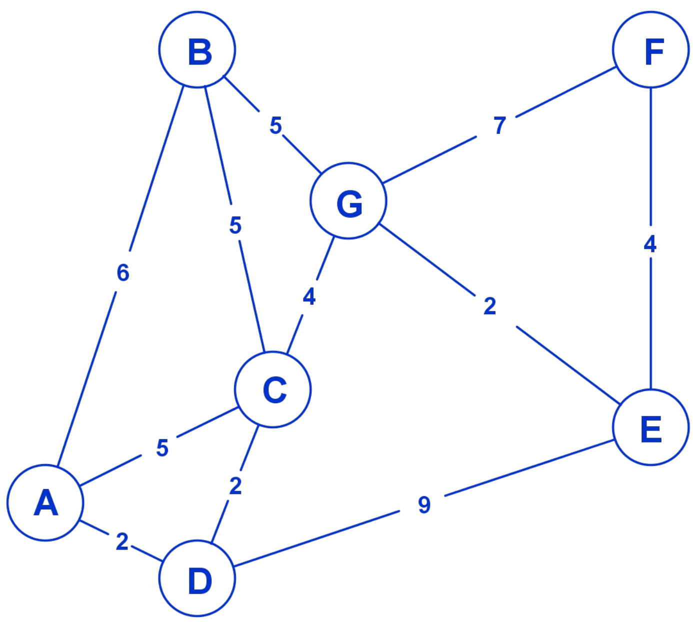
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos réservés à ses habitants.
Pour cette étude, on suppose que la population de la ville reste constante.
Le 1[er] janvier 2017, la ville compte 5 % d'abonnés parmi ses habitants. Ces dernières années, le responsable du service de location a constaté que :
. 93 % des abonnements sont renouvelés ;
. 1 % des habitants qui n'étaient pas abonnés l'année précédente souscrivent un abonnement.
On note A l'état : « un habitant est abonné » et P l'état : « un habitant n'est pas abonné ».
Pour tout entier naturel n, on désigne par a_n la probabilité qu'un habitant soit abonné l'année $2017+n$ et p_n la probabilité qu'un habitant ne soit pas abonné l'année $2017+n$.
La matrice ligne $R_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ donne l'état probabiliste du nombre d'abonnés l'année $2017+n$.
Ainsi $R_0=\begin{pmatrix}a_0 & b_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}95\end{pmatrix}$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et P où le sommet A représente l'état « un habitant est abonné » et P l'état « un habitant n'est pas abonné ».
2. Déterminer la matrice de transition T de ce graphe en respectant l'ordre A puis P des sommets.
3. Déterminer R_1 .
4. Déterminer l'état probabiliste en 2021.
Les résultats seront arrondis au millième.
5. On admet qu'il existe un état stable $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$.
5.a. Justifier que x et y sont solutions du système : $\begin{cases}-7x+y=0\\ x+y=1\end{cases}$.
5.b. Déterminer l'état stable de ce graphe.

Partie B



Le responsable du service de location souhaite vérifier l'état des pistes cyclables reliant les parkings à vélos de location disposés dans la ville.
On modélise la disposition des lieux par le graphe étiqueté ci-devant dont les sommets représentent les parkings à vélos.
Le poids des arêtes sont les durées moyennes de parcours, en minute, pour se rendre d'un parking à l'autre en suivant la piste cyclable.

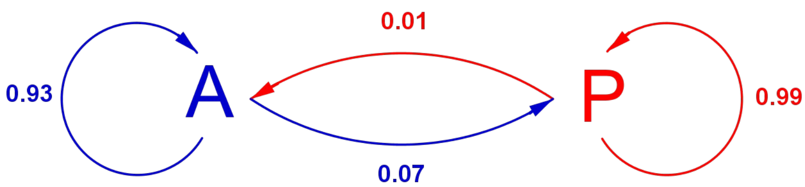
1. Le responsable peut-il planifier un parcours partant de son bureau situé en A jusqu'à la mairie située en F en passant par toutes les pistes cyclables sans emprunter deux fois le même chemin ?

2. Le responsable est pressé. Déterminer le parcours le plus rapide possible permettant d'aller de A à E.

CORRECTION

1. A est l'état : « un habitant est abonné »
P est l'état : « un habitant n'est pas abonné »

- 93 % des abonnements sont renouvelés donc 7 % des abonnements ne sont pas renouvelés.
  Conséquences
  Le poids de l'arête AA est 0,93.
  Le poids de l'arête AP est 0,07.
- 1 % des habitants qui n'étaient pas abonnés l'année précédente souscrivent un abonnement dont 99 % ne souscrivent pas d'abonnement.
  Conséquences
  Le poids de l'arête PA est 0,01.
  Le poids de l'arête PP est 0,99.
- On obtient l'arbre probabiliste suivant :



2. L'ordre des sommets et l'ordre alphabétique.
Dans cet exercice, on utilise les matrices lignes.

La matrice de transition T associée à ce graphe est : $T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$

t_{11} est le poids de l'arête AA : 0,93
t_{12} est le poids de l'arête AP : 0,07
t_{21} est le poids de l'arête PA : 0,01
t_{22} est le poids de l'arête PP : 0,99

$T=\begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}07 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix}$

3. $R_1=R_0T=\begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}07 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix}$

$R_1=\begin{pmatrix} 0{,}05\times 0{,}93 + 0{,}95\times 0{,}01 & 0{,}05\times 0{,}05 + 0{,}95\times 0{,}99 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}0465 + 0{,}0095 & 0{,}0035 + 0{,}9405 \end{pmatrix}$

$R_1=\begin{pmatrix} 0{,}056 & 0{,}944 \end{pmatrix}$.

4. 2021=2017+4

$R_4=R_0T^4$

En utilisant la calculatrice et en arrondissant au millième, on obtient :

$T^4=\begin{pmatrix} 0{,}752 & 0{,}248 \\ 0{,}035 & 0{,}965 \end{pmatrix}$

$R_4=R_0T^4=\begin{pmatrix} 0{,}071 & 0{,}929 \end{pmatrix}$

5.a. $R=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ est l'état stable $\Leftrightarrow \begin{cases} RT=T \\ x+y=1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}T=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}07 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}93x+0{,}01\,y=x \\ 0{,}01\,x+0{,}99\,y=y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}07\,x+0{,}01\,y=0 \\ 0{,}07\,x-0{,}01\,y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \{-0{,}07\,x+0{,}01\,y=0 \Leftrightarrow \{-7\,x+y=0$

$R=(x \quad y)$ est l'état stable $\Leftrightarrow \begin{cases} -7\,x+y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$

5.b. $\begin{cases} y=7\,x \\ x+y=1 \end{cases}$ on obtient $x+7\,x=1 \Leftrightarrow 8\,x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{8}=0{,}125$ et $y=7\times 0{,}125=0{,}875$

$(0{,}125 \quad 0{,}875)$ **est l'état stable de ce graphe.**

Partie B

1. On nous demande s'il existe une chaîne eulérienne reliant A à F.
Théorème d'Euler
Un graphe connexe admet au moins une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
Remarque
Si le nombre de sommets de degré impair est 2 alors toute chaîne eulérienne a pour extrémités ces deux sommets de degré impair.
Pour notre exemple :
Le degré de A est 3 et le degré de F est 2 donc il n'existe pas de chaîne eulérienne reliant A et F.

2. Pour déterminer, le parcours le plus rapide, on détermine le chemin le plus court permettant d'aller de A à F en utilisant l'algorithme de Dijkstra.
Dans le tableau, on place le sommet A en premier et le sommet F en dernier et entre les deux on place les sommets par ordre alphabétique.

A	B	C	D	E	G	F
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	6(A)	5(A)	2(A)	∞	∞	∞
	6(A)	4(D)	2(A)	11(D)	∞	∞
	6(A)	4(D)		11(D)	8(C)	∞
	6(A)			11(D)	8(C)	∞
				10(G)	8(C)	15(G)
				10(G)		14(E)
						14(E)

Le plus court chemin pour aller de A à F est A-D-C-G-E-F.
Le temps pour parcourir ce chemin est 14 minutes.