Exercice 3 5 points

Chaque année, les organisateurs d'une course de montagne proposent trois parcours de difficulté croissante : vert, bleu et rouge.
Les organisateurs ont constaté que 50 % des coureurs choisissent le parcours vert, 30 % choisissent le parcours bleu, le reste des coureurs choisit le parcours rouge.
Ils ont également constaté, en observant les années précédentes que :
. 3,2 % de l'ensemble des coureurs abandonnent la course ;
. 2 % des coureurs du parcours vert abandonnent la course ;
. 5 % des coureurs du parcours rouge abandonnent la course.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.

Partie A

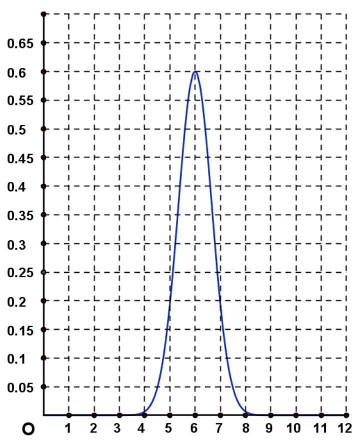
À la fin de la course , on choisit au hasard un des participants de telle façon que tous ont la même probabilité d'être choisis.
On note :
. V l'événement « Le coureur a choisi le parcours vert » ;
. B l'événement « Le coureur a choisi le parcours bleu » :
. R l'événement « Le coureur a choisi le parcours rouge » ;
. A l'événement « Le coureur a abandonné la course ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.
2. Calculer la probabilité de l'événement $V\cap A$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Un coureur se blesse et abandonne la course. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi le parcours vert ?
4. Démontrer que $P(B\cap A)=0{,}012$.
5. En déduire la probabilité $P_B(A)$. Interpréter ce résultat dans le contexe de l'exercice.

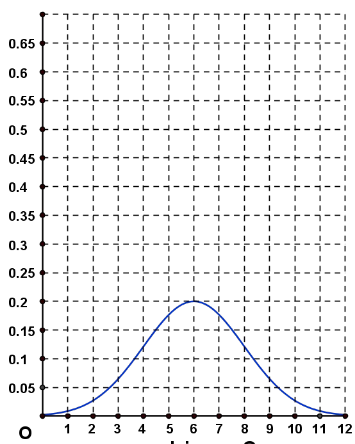
Partie B

Le temps hebdomadaire d'entrainement des coureurs du parcours rouge, exprimé en heure,peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale dont l'espérance est 6 heures et l'écart-type est de 2 heures.

1. Lequel des deux graphiques suivants, graphique 1 ou graphique 2 représente la fonction de densité de la loi normale de paramètres $\mu=6$ et $\sigma=2$? Justifier la réponse.



graphique 1



graphique 2

2. Un magazine spécialisé interroge au hasard quelques participants du parcours rouge afin de mener une enquête sur la durée de leur entraînement.
On arrondira les résultats au millième.

2.a. Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est comprise entre 5h et 7h ?

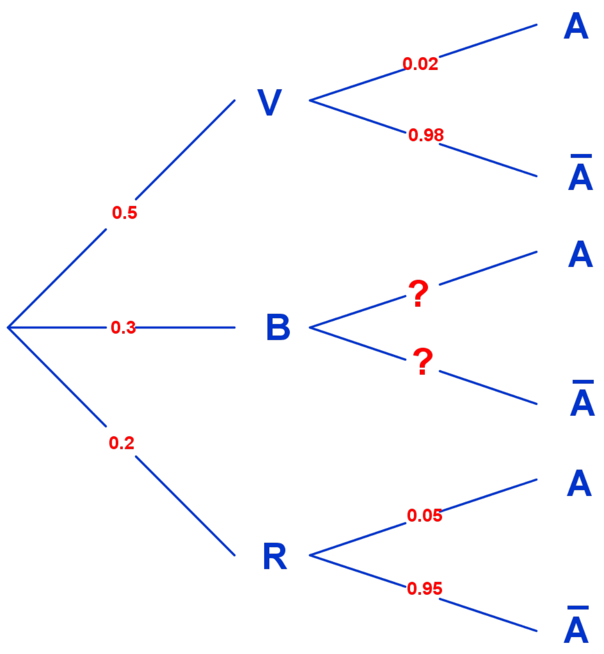
2.b. Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est inférieure à 4h ?

CORRECTION

Partie A

1. L'énoncé précise :

- 50 % des coureurs choisissent le parcours vert, 30 % choisissent le parcours bleu, le reste des courreurs (100-50-30=20%) choisit le parcours rouge.
  Donc P(V)=0,5, P(B)=0,3 et P(R)=0,2.
- 2 % des coureurs du parcours vert abandonnent la course donc $P_V(A)=0{,}02$ et $P_V(\bar{A})=1-P_V(A)$
  $P_V(\bar{A})=1-0{,}02=0{,}98$.
- 5 % des coureurs du parcours rouge abandonnent la course donc $P_R(A)=0{,}05$ et $P_R(\bar{A})=1-P_R(A)$
  $P_R(\bar{A})=1-0{,}05=0{,}95$.
- On obtient l'arbre pondéré :



2. $P(V\cap A)=P(V)\times P_V(A)=0{,}5\times 0{,}02$ = **0,01.**
1 % des coureurs sont des coureurs ayant choisi le parcours vert et abandonnent la course.

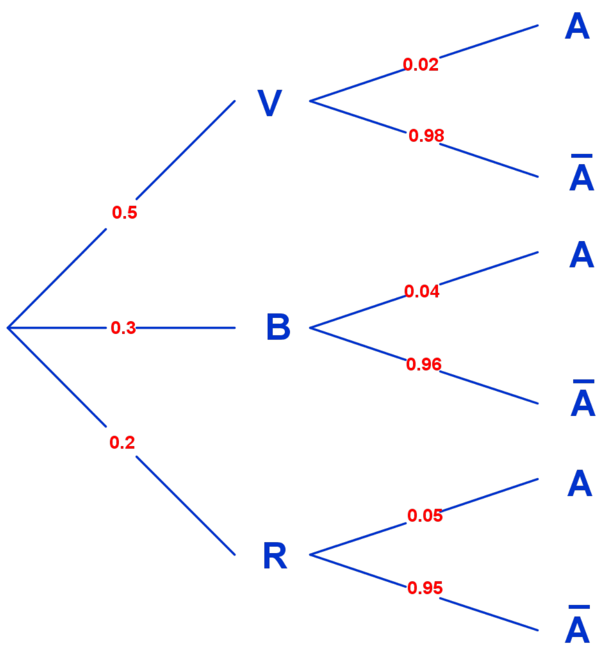
3. On nous demande de calculer $P_A(V)$.
$P_A(V)=\dfrac{P(A\cap V)}{P(A)}$.
3,2 % de l'ensemble des coureurs abandonnent la course donc P(A)=0,032.
$P_A(V)=\dfrac{0{,}01}{0{,}032}=\dfrac{10}{32}=\dfrac{5}{12}$ = **0,3125.**

4. La formule des probabilités totales nous permet d'affirmer que :
$P(A)=P(V\cap A)+P(B\cap V)+P(R\cap A)$
$P(A)=0{,}032 \qquad P(V\cap A)=0{,}01$
$P(R\cap A)=P(R)\times P_R(A)=0{,}2\times 0{,}05=0{,}01$
Donc $P(B)\cap A¿=0{,}032-0{,}01-0{,}01$ = **0,012.**

5. $P_B(A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(B)}=\dfrac{0{,}012}{0{,}3}=\dfrac{12}{300}=\dfrac{4}{100}$ = **0,04.**
<u>Conséquence</u>

$P_B(\bar{A})=1-P_B(A)=1-0{,}04=$ **0,96.**

On donne l'arbre pondéré complété.

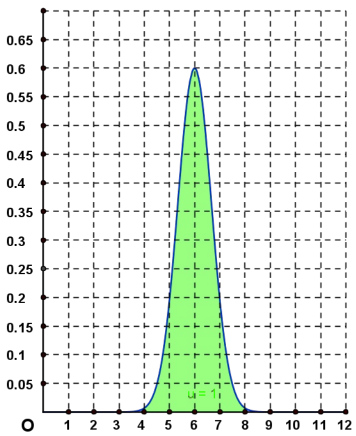


Partie B

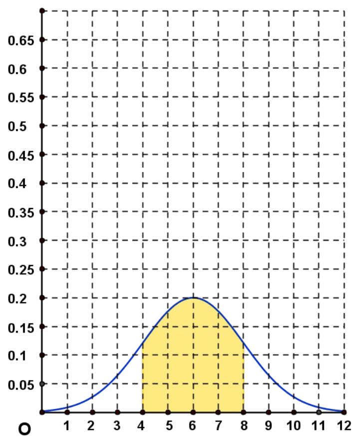
1. Si on note f la fonction de densité de la loi normale d'espérance 6 et d'écart-type 2 alors :

$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0{,}68$ soit $P(6-2\leqslant X\leqslant 6+2)=P(4\leqslant X\leqslant 8)=0{,}68=\int_4^8 f(x)\,dx$.

Cette intégrale est égale à l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe représetative de f, l'axe des abscisses et droites d'équations x=4 et x=8.



Graphique 1



Graphique 2

On remarque pour le graphique 1 que l'aire de la partie colorée en vert est presque égale à 1 $(\neq 0{,}68)$.

<u>Conclusion</u>

C'est le graphique 2 qui représente la fonction de densité de la loi normale de paramètres $\mu=6$ et $\sigma=2$.

2.a. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$P(5\leqslant X\leqslant 7)=$ **0,38.**

2.b. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$P(X\leqslant 4)=$ **0,16.**

<u>Remarque</u>

$P(X\leqslant 4)=P(8\geqslant X)=\frac{1}{2}(1-P(4\leqslant X\leqslant 8))=\frac{1}{2}(1-0{,}68)=$ **0,16.**