Exercice 4 5 points

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [1;25] par : $f(x)=10-\frac{e^{0,2x+1}}{x}$

Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants que l'on pourra utiliser :

f(x): 10 − e^(0.2x+1)/x
$x \longrightarrow 10 - \frac{\exp(0.2x+1)}{x}$
factoriser(deriver(f(x)))
$\frac{\exp(0.2x+1)*(1-0.2x)}{x^2}$
factoriser(deriver(deriver(f(x))))
$\frac{\exp(0.2x+1)*(-x^2+10x-50)}{25x^3}$

1. Retrouver par le calcul l'expression factorisée de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. Étudier le signe de f' sur l'intervalle [1;25] et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle [1;25]. On arrondira les valeurs au millième.
3. On s'interesse à l'équation $f(x)=0$.
3.a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle [1;5].
3.b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle [5;25].
3.c. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α .
3.d. En utilisant un des résultats donnés par le logiciel de calcul formel, justifier que la fonction f est concave sur l'intervalle [1;25].

Partie B

Une société agro-alimentaire fabrique des aliments pour bétail. On s'intéresse au bénéfice réalisé, en millier d'euros, correspondant à la production d'une quantité de x dizaines de tonnes d'aliments.
On admet que le bénéfice peut-être modélisée par la fonction f étudiée dans la partie A ci-dessus.
La production minimale est de 10 tonnes, ainsi $x \geqslant 1$.

Les réponses aux questions suivantes seront justifiées grâce à la partie A.

1. Quel est le montant en euro du bénéfice maximal que peut dégager la société ?
Pour quelle quantité d'aliments ce bénéfice maximal est-il obtenu ?

2. Déterminer, à la tonne près, la quantité maximale d'aliments qu'il faut fabriquer pour que la société réalise un bénéfice.

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;25] : $f(x)=10-\dfrac{e^{0,2x+1}}{x}$.

$(e^u)'=u'e^u$ donc $(e^{0,2x+1})'=0,2e^{0,2x+1}$

$$f'(x)=0-\frac{x\times(0,2e^{0,2x+1})-1\times e^{0,2x+1}}{x^2}=\frac{-0,2xe^{0,2x+1}+e^{0,2x+1}}{x^2}=\frac{e^{0,2x+1}\times(1-0,2x)}{x^2}$$

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;25], $e^{0,2x+1}>0$ et $x^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de : (1 – 0,2x).

$1-0,2x=0 \Leftrightarrow 1=0,2x \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{0,2}=5$

$1-0,2x>0 \Leftrightarrow 1>0,2x \Leftrightarrow 5>x \ (\geqslant 1)$

$1-0,2x<0 \Leftrightarrow 1<0,2x \Leftrightarrow 5<x \ (\leqslant 25)$

$f(1)=10-\dfrac{e^{1,2}}{1}$ = **6,680 à 10^{-3} près.**

$f(5)=10-\dfrac{e^{2}}{5}$ = **8,522 à 10^{-3} près.**

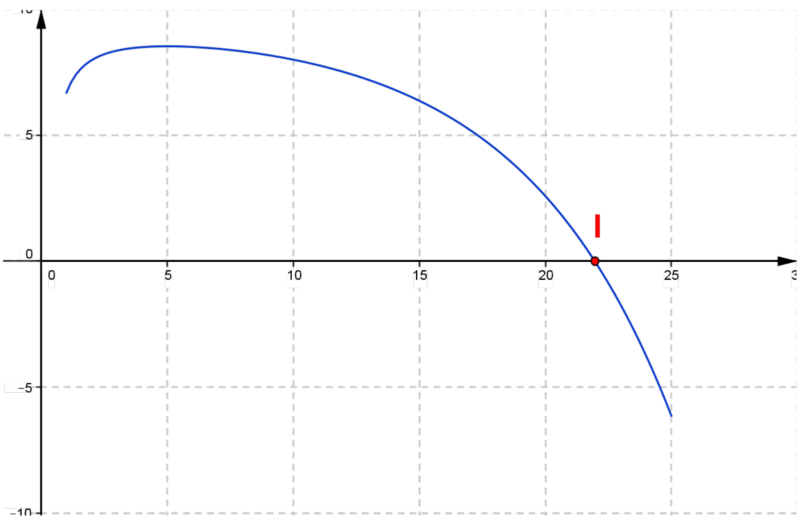
$f(25)=10-\dfrac{e^{6}}{25}$ = **- 6,137 à 10^{-3} près.**

x	1		5		25
f '(x)		+	0	–	
f(x)	f(1)	↗	f(5)	↘	f(25)

3.a. f est croissante sur l'intervalle [1;5] donc pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [1;5] : $f(1)\leqslant f(x)$ or $f(1)>6$ donc **l'équation f(x) = 0 n'admet pas de solution dans l'intervalle [1;5].**

3.b. f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [5;25], f(5) >6 et f(25)< -6 donc 0 appartient à l'intervalle [f(25);f(5)] et le théorème des valeurs intermédiaire nous permet d'affirmer que **l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α appartenant à l'intervalle [5;25].**

3.c.



En utilisant la calculatrice qui permet d'obtenir la courbe représentative de f. On détermine graphiquement l'abscisse du point d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses on obtient : 22.
Puis on calcule :
f(22)= - 0,064< 0 donc $\alpha < 22$
f(21,9)= 0,09 >0 donc $21{,}9 < \alpha$
f(21,95)= 0,001 >0 donc $21{,}95 < \alpha$
f(21,96)= - 0,002< 0 donc $\alpha < 21{,}96$
Conclusion
$21{,}95 < \alpha < 21{,}96$

3.d. f est deux fois dérivable sur [1;25] et le logiciel de calcul formel nous donne :
$$f''(x)=\frac{e^{0,2x+1}\times(-x^2+10x-50)}{25x^3}.$$
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;25] $e^{0,2x+1}>0$ et $25x^3>0$ donc le signe de $f''(x)$ est le signe de $(-x^2+10x-50)$.
On détermine le signe du trinôme : $T(x)=-x^2+10x-50$
$\Delta=10^2-4\times(-1)\times(-50)=-100<0$
Le signe du trinôme T(x) est le signe - (T(x)< 0 sur [1;25]).
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;25], $f''(x)<0$.
Conclusion
f est concave sur [1;25].

Partie B

1. Le maximum de la fonction f est égal à f(5) = 8,522 à 10^{-3} près.
Le bénéfice maximal est égal à 8,522 milliers d'euros soit 8 5522 €.
Ce bénéfice maximal est obtenu pour la production de 5 dizaines de tonnes soit 50 tonnes.

2. La courbe représentative de f est au dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1;\alpha[$ et en dessous sur l'intervalle $]\alpha;25]$.
La quantité maximale qu'il faut fabriquer pour que la société réalise un bénéfice est : α dizaines de tonnes $\alpha=21{,}96$ à 10^{-3} près donc $\alpha=22$ à 10^{-1} près.
Conclusion
La quantité maximale qu'il faut fabriquer pour que la société réalise un bénéfice est 220 tonnes.