Exercice 1 4 points

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=1+\ln(x)$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
Pour chacune des quatre affirmations suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse. En justifiant la réponse.

Affirmation 1
On note F la primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f qui vérifie F(1)=0.
Pour tout réel x strictement positif, $F(x)=x\ln(x)$

Affirmation 2
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Affirmation 3
L'équation f(x)=2 possède exactement une solution dans l'intervalle [1;10].

Affirmation 4
Il existe au moins un point de la courbe C pour lequel la tangente en ce point est située entièrement sous la courbe C.

CORRECTION

Pour tout nombre réel de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=1+\ln(x)$

Affirmation 1 $\boxed{\textbf{VRAIE}}$

Justification

$F(x)=x\ln(x)$

$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$

On dérive un produit

$F'(x)=1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}=\ln(x)+1=f(x)$

$F(1)=1\times\ln(1)=0$

Donc **F est la primitive de f qui vérifie F(1)=0.**

Affirmation 2 $\boxed{\textbf{VRAIE}}$

Justification

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=0+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}>0$.

Donc **f est strictement croissante sur** $]0;+\infty[$ **.**

Affirmation 3 $\boxed{\textbf{VRAIE}}$

Justification

$f(x)=2 \quad \Leftrightarrow \quad 1+\ln(x)=2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x)=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=e$

e appartient à l'intervalle[1;10].

L'équation f(x)=2 admet exactement une solution dans l'intervalle [1;10].

Affirmation 4 $\boxed{\textbf{FAUSSE}}$

Justification

f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$

$f'(x)=\frac{1}{x}$ donc $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$.

Donc la fonction f est concave sur $]0;+\infty[$

Il n'existe pas de point de la courbe C pour lequel la tangente en ce point est située entièrement sous la courbe C.