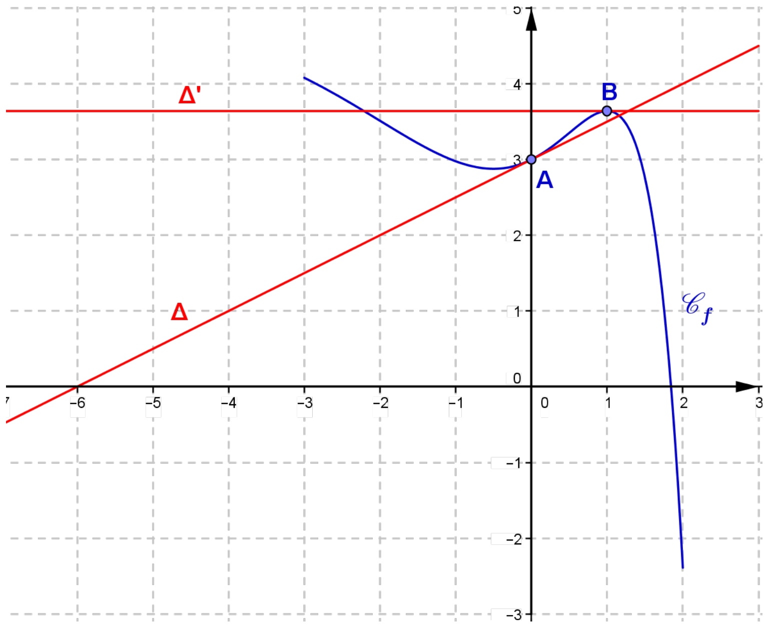
Exercice 3 6 points

Partie A

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [-3;2].
On note f' la fonction dériée de la fonction f.
Le point A de coordonnées (0;3) appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
B est le point d'abscisse 1 appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$.



On dispose des informations suivantes :
. la fonction f est strictement décroissante sur les intervalles [-3 ;-0,5] et [1;2] et elle est strictement croissante sur [-0,5;1].
. la droite Δ d'équation y=0,5x+3 est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
. la tangente Δ' à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses.
Chaque réponse devra être justifiée.

1. Donner la valeur de $f'(1)$.
2. Quel est le signe de $f'(-2)$?
3. Donner la valeur de $f'(0)$.
4. Le point A est-il un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$?
5. Déterminer un encadrement par deux entiers consécutifs de $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Partie B

On admet qu'il existe trois réels a,b et c pour lesquels la fonction f représentée dans la partie A est définie, pour tout réel x de [-3;2], par : $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x+5$.

1. En utilisant l'un des points du graphique, justifier que c=-2.

2. On admet que la fonction dérivée f' est donnée, pour tout réel x de [-3;2] par :
$f'(x)=(ax^2+(2a+b)x-2+b)e^x$.
En utilisant les résultats de la partie A, justifier que b=2,5 puis que a=-1.

Partie C

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de [-3;2] par :
$f(x)=(-x^2+2{,}5x-2)e^x+5$.

1. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle [-3;2]
$f'(x)=(-x^2+0{,}5x+0{,}5)e^x$

2. Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f sur[-3;2].

3.a. Justifier que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α sur [1;2].
3.b. Donner la valeur de α arrondie au centième.

CORRECTION

Partie A

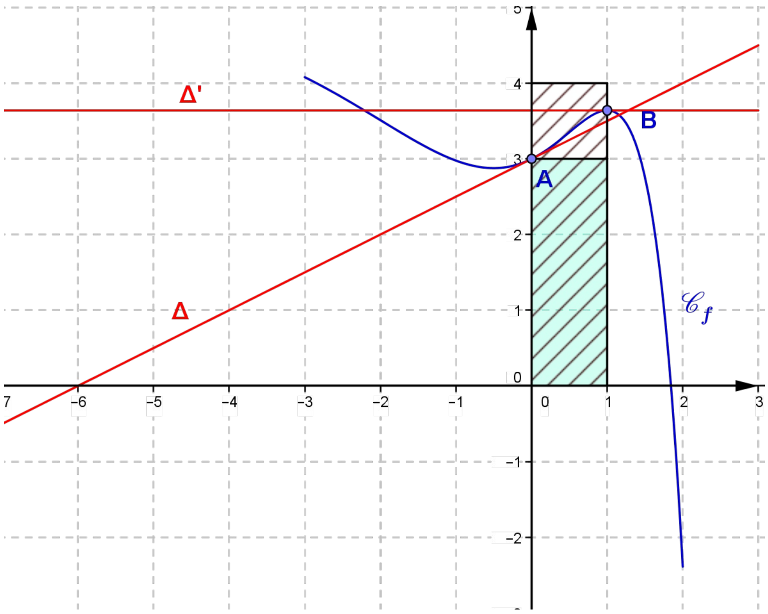
1. La tangente Δ' au point B(1;f(1)) de $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses, son coefficient directeur $f'(1)$ est donc égal à 0.
$f'(1) =$ **0.**

2. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse : -2 est négatif donc $f'(-2)$ **est du signe -** .

3. La tangente Δ au point A(0;3) a pour équation y=0,5x+3, son coefficient directeur $f'(0)$ est égal à 0,5.
$f'(0) =$ **0,5.**

4. Sur l'intervalle [-0,5;0,5], la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de toutes ses tangentes donc f est convexe sur [-0,5;0,5].
Conséquence
Le point A n'est pas un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

5. f est positive sur [0;1] donc $\int_0^1 f(x)\,dx$ est l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=1.



Cette partie de plan, contient un rectangle d'aire 3 U.A.(coloré sur la figure) et est contenu dans un rectangle d'aire 4 U.A.(hachuré sur la figure).
Conclusion
$3 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant 4$ ..

Partie B

Pour tout réel de l'intervalle de [-3;2], $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x+5$.

1. Le point A(0;3) appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ donc f(0)=3 $\Leftrightarrow$ $(a-0^2+b\times 0+c)e^0+5=3$ $\Leftrightarrow$ **c = -2.**
donc $f(x)=(ax^2+bx-2)e^x+5$.

2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle [-3;2] : $f'(x)=(ax^2+(2a+b)x-2+b)e^x$.

$f'(0)=0,5 \Leftrightarrow (a\times 0^2+(2a+b)\times 0-2+b)e^0=0,5 \Leftrightarrow -2+b=0,5 \Leftrightarrow$ **b = 2,5.**

$f'(x)=(ax^2+(2a+2,5)x+0,5)e^x$

$f'(1)=0 \Leftrightarrow (a\times 1^2+(2a+2,5)\times 1+0,5)e^1=0 \Leftrightarrow (a+2a+0,5+0,5)\times e=0 \Leftrightarrow 3a+3=0$

$\Leftrightarrow$ **a = -1.**

donc $f(x)=(-x^2+2,5x-2)e^x+5$

Partie C

1. Pour tout réel de l'intervalle [-3;2], $f'(x)=(ax^2+(2a+b)x-2+b)e^x$

a = -1 et b = 2,5

$f'(x)=(-x^2+0,5x+0,5)e^x$

2. Pour tout réel x de [-3;2], $e^x>0$ donc $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow -x^2+0,5x+0,5\geqslant 0$

On note $T(x)=-x^2+0,5x+0,5$

$\Delta=0,25-4\times 0,5\times(-1)=2,25=1,5^2$

Le trinôme admet deux racines distinctes

$x'=\dfrac{-0,5-1,5}{-2}=1$ et $x''=\dfrac{-0,5+1,5}{-2}=-0,5$.

En utilisant le signe du trinôme, on obtient le signe de T(x) sur [-3;2].

x	-3		-0.5		1		2
T(x)		–	0	+	0	–	

Le signe de T(x) sur [-3;2] est le signe de $f'(x)$.

<u>Tableau de variation de f</u>

x	-3		-0.5		1		2
f'(x)		–	0	+	0	–	
f(x)	$5-18.5e^{-3}$	↘	$5-3.5e^{-0.5}$	↗	$5-0.5e^1$	↘	$5-e^2$

$f(-3)=(-9-7,5-2)e^{-3}+5=-18,5e^{-3}+5=4,08$ à 10^{-2} près, $f(-3)>0$

$f(-0,5)=(-0,25-1,25-2)e^{-0,5}+5=-3,5e^{-0,5}+5=2,88$ à 10^{-2} près, $f(-0,5)>0$

$f(1)=(-1+2,5-2)e+5=-0,5e+5=3,64$ à 10^{-2} près, $f(1)>0$

$f(2)=(-4+5-2)e^2+5=-e^2+5=-2,39$ à 10^{-2} près, $f(2)<0$.

2.a. Sur [-3;2], f admet un minimum pour x=0,5 égal à $-3,5e^{-0,5}+5>0$ donc l'équation f(x) = 0 n'admet pas de solution sur [-3;1].

. Sur [1;2] f est strictement décroissante, $f(1)=-0,5e+5>0$ et $f(2)=-e^2+5<0$ donc 0 appartient à l'intervalle [f(2);f(1)] et l'équation f(x)=0 admet une solution unique α appartenant à l'intervalle [1;2].

. <u>Conclusion</u>

L'équation f(x)=0 admet une unique solution α appartenant à l'intervalle [-3;2].

2.b. En utilisant la calculatrice : f(1,8)=0,52 >0 et f(1,9)= -0,75< 0 donc $1,8<\alpha<1,9$

f(1,84)=0,05 > 0 et f(1,85)= -0,07< 0 donc $1,84<\alpha<1,85$ et f(1,485)-0,009< 0.

1,84 est la valeur arrondie au centième de α .

