Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

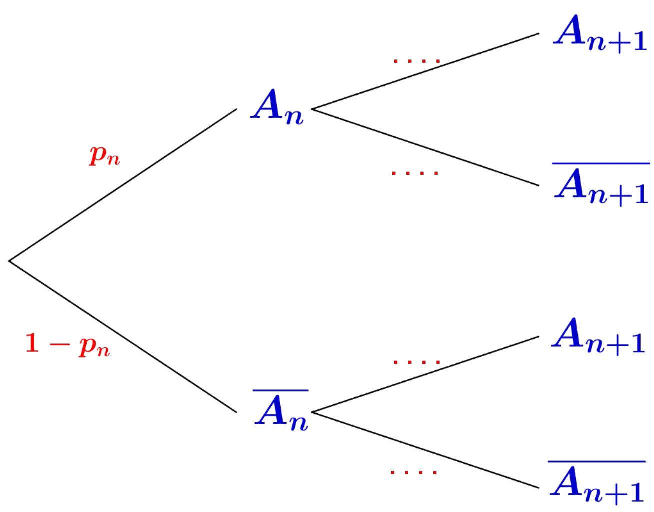
Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : « Approfondissement » ou « Ouverture culturelle ».
Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.
La première semaine, 20 % des élèves de la classe ont choisi « Approfondissement » et tous les autres ont choisi « Ouverture culturelle ».

On admet que :
- 20 % des élèves ayant choisi « Ouverture culturelle » une certaine semaine s'inscrivent en « Approfondissement » la semaine suivante ;
- 30 % des élèves ayant choisi « Approfondissement » une certaine semaine s'inscrivent en « Ouverture culturelle » la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartion des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines.

Chaque semaine, on interroge au hasard un élève de la classe.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement « l'élève a choisi « Approfondissement » la $n^{\text{ième}}$ semaine » et p_n la probabilité de l'événement A_n. On a alors $p_1=0{,}2$.

1. Recopier l'arbre ci-dessous et remplacer chacun des quatre pointillés par la probabilité correspondante.



2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1}=0{,}5\,p_n+0{,}2$

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n=p_n-0{,}4$

3.a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de son premier terme u_1.

3.b. En déduire pour tout entier naturel n l'expression de u_n en fonction de n, puis l'expression de p_n en fonction de n.

3.c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexe de l'exercice.

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	I et N sont des entiers naturels supérieurs à 1
	P est un nombre réel
Entrée :	Saisir N
Initialisation :	P prend la valeur 0,2
Traitement :	Pour I allant de 2 à N
	P prend la valeur 0,5P+0,2
	Fin Pour
Sortie :	Afficher P

4.a. Écrire ce qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur N=5.

4.b. Modifier l'algorithme afin qu'il affiche le numéro de la première semaine pour laquelle le pourcentage des élèves de la classe ayant choisi « Approfondissement » dépasse39,9.

CORRECTION

1. 20 % des élèves ayant choisi « Ouverture culturelle » une certaine semaine s'inscrivent en « Approfondissement » la semaine suivante donc 80 % s'inscrivent en « Ouverture culturelle ».

Conséquences

Pour tout entier naturel non nul n :

$P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})=0{,}2$ et $P_{\bar{A}_n}(\overline{A_{n+1}})=0{,}8$

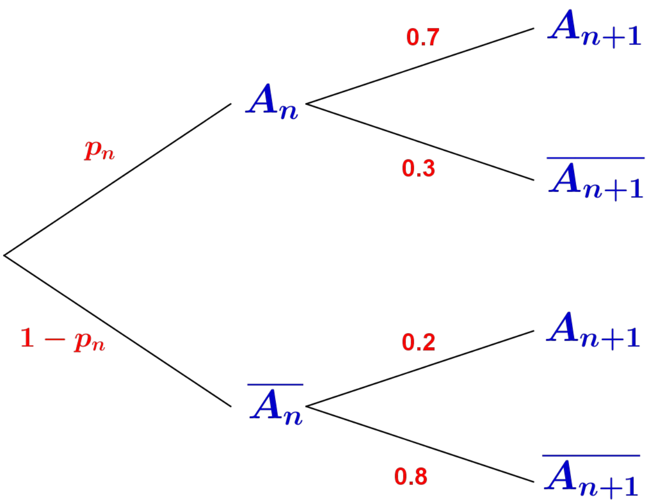
. 30 % des élèves ayant choisi « Approfondissement » une certaine semaine s'inscrivent en « Ouverture culturelle » la semaine suivante donc 70 % s'inscrivent en « Approfondissement ».

Conséquences

Pour tout entier naturel non nul n :

$P_{A_n}(\overline{A_{n+1}})=0{,}3$ et $P_{A_n}(A_{n+1})=0{,}7$

. On obtient l'arbre :



2. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales.

$p_{n+1}=P(A_{n+1})=P(A_{n+1}\cap A_n)+P(A_{n+1}\cap \bar{A}_n)=P(A_n)\times P_{A_n}(A_{n+1})+P(\bar{A}_n)\times P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$

$p_{n+1}=p_n\times 0{,}7+(1-p_n)\times 0{,}2=0{,}5\,p_n-0{,}2$

3. Pour tout entier naturel non nul n :

$u_n=p_n-0{,}4$ donc $p_n=u_n+0{,}4$

3.a. Pour tout entier naturel non nul n :

$u_{n+1}=p_{n+1}-0{,}4=0{,}5\,p_n+0{,}2-0{,}4=0{,}5(u_n+0{,}4)-0{,}2=0{,}5\,u_n+0{,}2-0{,}2$

$u_{n+1}=0{,}5\,u_n$ $u_1=p_1-0{,}4=0{,}2-0{,}4=-0{,}2$

(u_n) **est la suite géométrique de raison q=0,5 et de premier terme** u_1 **= -0,2.**

3.b. Pour tout entier naturel non nul n :

$u_n=u_1\times q^{n-1}=-2\times 0{,}5^{n-1}$

$p_n=u_n+0{,}4=0{,}4-2\times 0{,}5^{n-1}$

3.c. $0<0{,}5<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^{n-1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$ **0.**

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=$ **0,4.**

Dans un avenir lointain ,chaque semaine, 40 % des élèves de la classe s'inscriront en « Approfondissement ».

4.a. $p_2=0{,}5\times 0{,}2+0{,}2=0{,}3$

$p_3=0{,}5\times 0{,}3+0{,}2=0{,}35$

$p_4=0{,}5\times 0{,}35+0{,}2=0{,}375$

$p_5=0{,}5\times 0{,}375+0{,}2=0{,}3875$

Pour N=5 l'algorithme affiche : 0,3875.

4.b. Algorithme modifié

Variables :	**N est un entier naturel**
	P est un nombre réel
Initialisation :	**P prend la valeur 0,2**
	N prend la valeur 1
Traitement :	**Tant que P $\leqslant$ 39,9, faire**
	P prend la valeur 0,5P+0,2
	N prend la valeur N+1
	Fin Tant que
Sortie :	**Afficher N**