Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : « Approfondissement » ou « Ouverture culturelle ».
Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.
La première semaine, 20 % des élèves de la classe ont choisi « Approffondissement » et tous les autres ont choisi « Ouverture culturelle ».
On admet que :
. 20 % des élèves ayant choisi « Ouverture culturelle » une certaine semaine s'inscrivent en « Approfondissement » la semaine suivante ;
. 30 % des élèves ayant choisi « Approffondissement » une certaine semaine s'inscrivent en « Ouverture culturelle » la semaine suivante.
On s'intéresse à l'évolution de la répartion des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines.
On interroge au hasard un élève de la classe et on suit son choix d'option au fil des semaines.

1. On note A l'état « l'élève a choisi Approfondissement » et B l'état « l'élève a choisi Ouverture culturelle ».
1.a. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
1.b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

2. On note P_1 la matrice traduisant l'étar probabiliste de la première semaine. Ainsi $P_1=\begin{pmatrix}0,2 & 0,8\end{pmatrix}$.
2.a. Donner la matrice M^2 puis déterminer la probabilité que l'élève ait choisi « Approfondissement » lors de troisième semaine.
2.b. À long ternme, quelle est la probabilité qu'un élève choisisse « Approfondissement » ?

3. Pour tout entier naturel non nul n on note :
. a_n la probabilité que l'élève interrogé ait choisi « Approfondissement » lors de la $n^{\text{ième}}$ semaine.
. b_n la probabilité que l'élève interrogé ait choisi « Ouverture culturelle » lors de la $n^{\text{ième}}$ semaine.

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_{n+1}=0,5\,a_n+0,2$.

4. On admet que pour tout entier naturel n non nul,on a : $a_n=0,4-0,4\times 0,5^n$.
Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation suivante : $0,4-0,4\times 0,5^n > 3,99$.

5.a. recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n > 3,99$.

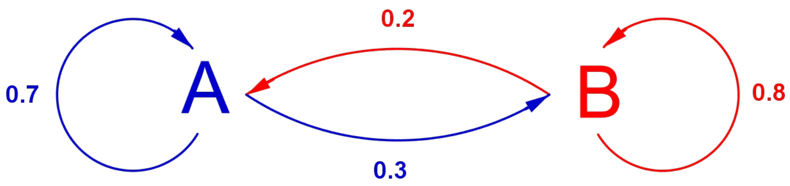
```
Variables :          N est un entier naturel
                      A est un nombre réel
Initialisation :     Affecter à N la valeur 1
                     Affecter à P la valeur 0,2
Traitement :         .....
                          Affecter à A la valeur 0,5xA+0,2
                          .....
                     .....
Sortie :             Afficher N
```

5.b. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme en sortie ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1.a. A est l'état « l'élève choisit Approfondissement »
B est l'état « l'élève choisit Ouverture culturelle »

- 20 % des élèves ayant choisi « Ouverture culturelle » une certaine semaine s'inscrivent en « Approfondissement » la semaine suivante donc 80 % s'inscrivent en « Ouverture culturelle ».
  <u>Conséquences</u>
  Le poids de l'arête BA est 0,2
  Le poids de l'arête BB est 0,8
- 30 % des élèves ayant choisi « Approfondissement » une certaine semaine s'inscrivent en « Ouverture culturelle » la semaine suivante donc 70 % s'inscrivent en « Approfondissement ».
  <u>Conséquences</u>
  Le poids de l'arête AB est 0,3
  Le poids de l'arête AA est 0,7
- On obtient l'arbre probabiliste suivant :



1.b. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique.
Dans cet exercice, on utilise les matrices lignes.

La matrice de transition M associé à ce graphe est : $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA : 0,7
m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,3
m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,2
m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,8

$$M=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

2.a. $M^2=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,7\times 0,7+0,3\times 0,2 & 0,7\times 0,3+0,3\times 0,8 \\ 0,2\times 0,7+0,8\times 0,2 & 0,2\times 0,3+0,8\times 0,8 \end{pmatrix}$

$M^2=\begin{pmatrix} 0,49+0,06 & 0,21+0,24 \\ 0,14+0,16 & 0,06+0,64 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$

On peut obtenir ce résultat en utilisant la calculatrice.

$P_3=P_1M^2=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,11+0,24 & 0,09+0,56 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$.

La probabilité que l'élève ait choisi « Approfondissement » lors de la troisième semaine est : 0,35.

2.b. On détermine l'état stable $P=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x+y=1 \\ PM=P \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,7x+0,2y & 0,3x+0,8y \end{pmatrix}$$

$$P=PM \Leftrightarrow \begin{cases} x=0,7x+0,2y \\ y=0,3x+0,8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3x-0,2y=0 \\ 0,3x-0,2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \{0,3x-0,2y=0 \Leftrightarrow \{3x-2y=0$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$$

On obtient : $3x-2(1-x)=0 \iff 5x=2 \iff x=\frac{2}{5}=0{,}4$

et $y=\frac{3}{5}=0{,}6$

$P=(0{,}4 \quad 0{,}6)$ est l'état stable.

À long terme la probabilité qu'un élève choisisse « Approfondissement » est : 0,4.

3. Pour tout entier naturel n, non nul :

$P_{n+1}=P_nM \iff (a_{n+1} \quad b_{n+1})=(a_n \quad b_n)\begin{pmatrix} 07 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}=(0{,}7a_n+0{,}2b_n \quad 0{,}3a_n+0{,}8b_n)$

$\iff \begin{cases} a_{n+1}=0{,}7a_n+0{,}2b_n \\ b_{n+1}=0{,}3a_n+0{,}8b_n \end{cases}$

Donc $a_{n+1}=0{,}7a_n+0{,}2b_n$ et $a_n+b_n=1$

On obtient : $a_{n+1}=0{,}7a_n+0{,}2(1-a_n)=0{,}5a_n+0{,}2$.

4. $0{,}4-0{,}4\times0{,}5^n > 0{,}399 \iff 0{,}001 > 0{,}4\times0{,}5^n \iff \frac{0{,}001}{0{,}4} > 0{,}5^n \iff \frac{1}{400} > 0{,}5^n$

ln est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\iff \ln\left(\frac{1}{400}\right) > \ln(0{,}5^n) \iff -\ln(400) > n\times\ln(0{,}5)$

$0<0{,}5<1$ donc $\ln(0{,}5) < 0$

$\iff -\frac{\ln(400)}{\ln(0{,}5)} < n$

$-\frac{\ln(400)}{\ln(0{,}5)}=8{,}64$ à 10^{-2} près.

L'ensemble des entiers naturels solutions de l'inéquation sont les entiers naturels supérieurs ou égal à 9.

5.a.

Variables :	N est un entier naturel
	A est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à N la valeur 1
	Affecter à A la valeur 0,2
Traitement :	**Tant que A $\leqslant$ 0,399, faire**
	Affecter à A la valeur 0,5xA+0,2
	Affecter à N la valeur N+1
	Fin Tant que
Sortie ;	Afficher N

5.b. En utilisant les résultats précédents, on obtient : **9.**

À partir de la 9 ième semaine, plus de 39,90 % des élèves choisiront « Approfondissement ».