Exercice 2 — 6 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [-20;20] par : $f(x)=(-2x+30)\mathrm{e}^{0,2c-3}$

1.a. Montrer que $f'(x)=(-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle [-20;20].
1.b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [-20;20].
On précisera la valeur exacte du maximum f.

2.a. Montrer que, sur l'intervalle [-20;20], l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α.
2.b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

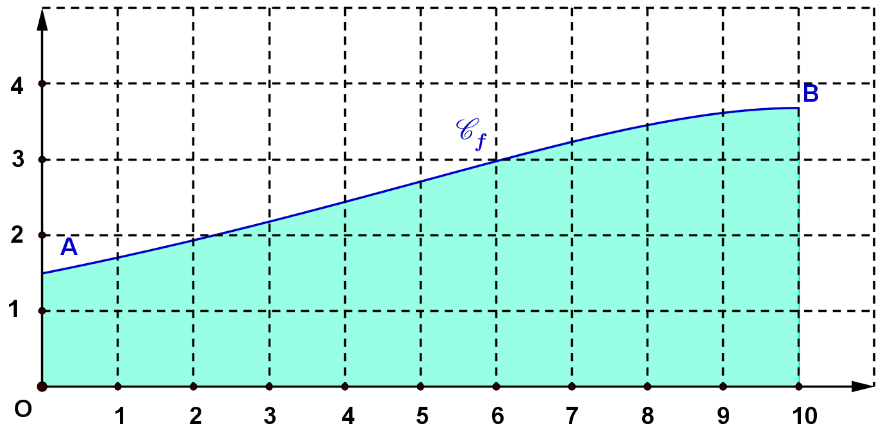
1	Dériver $(-10x+200)e^{0.2x-3}$ $(-2x+30)e^{0.2x-3}$
2	Dériver $(-2x+30)e^{0.2x-3)}$ $(-0.4x+4)e^{0.2x-3}$
3	Dériver $(-0.4x+4)e^{0.2x-3}$ $(-0.08x+0.4)e^{0.2x-3}$

Répondre aux deux questions suivantes en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

3.a. Calculer la vaeur exacte de $\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3.b. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

Partie B

Une station de ski souhaite ouvrir une nouvelle piste au public. Le relief de cette piste est modélisé ci-dessous par la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie dans la partie A sur l'intervalle [0;10]. Le point B représente le départ de la nouvelle piste et le point A représente la station de ski où se trouve l'arrivée.



Le réel x représente la distance horizontale, exprimée en km, depuis la station de ski et f(x) représente l'altitude, exprimée en km.

On appelle pente de la piste du point M, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point M. Par exemple, une pente de 15 % en un point de la piste correspond à un coefficient directeur de $\frac{15}{100}=0{,}15$.

1. On appelle dénivelé d'une piste de ski, la différence d'altitude entre le point de départ et le point d'arrivée de cette piste. Calculer le dénivelé de cette nouvelle piste. On arrondira le résultat au mètre.

2. La station de ski doit déterminer la difficulté de cette nouvelle piste en fonction de la pente.

- La piste sera classée noire, c'est à dire très difficile, si au moins une portion de la piste a une pente supérieure à 40 %.
- La piste sera classée rouge, c'est à dire difficile, si au moins une portion de la piste a une pente strictement comprise entre 25 % et 40 % (et aucune portion avec une pente supérieure ou égale à 40%).
- Si toutes les portions de la piste ont une pente inférieure ou égale à 25 % alors la piste sera classée bleue, c'est à dire facile.

Déterminer le niveau de difficulté de cette nouvelle piste.
Justifier la réponse.

CORRECTION

Partie A

f est définie sur l'intervalle [-20;20] par : $f(x)=(-2x+30)e^{0,2x-3}$

1.a. $(e^u)'=u'e^u$ $\quad (e^{0,2x-3})'=0,2e^{0,2x-3}$

On dérive un produit

$f'(x)=-2\times e^{0,2x-3}+(-2x+30)(0,2e^{0,2x-3})=(-2-0,4x+6)e^{0,2x-3}=(-0,4x+4)e^{0,2x-3}$

1.b. Pour tout nombre réel x, $e^{0,2x-3}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de :-0,4x+4.

$$-0,4x+4\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 4\geqslant 0,4x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{0,4}\geqslant x \quad\Leftrightarrow\quad 10\geqslant x$$

$$-0,4x+4<0 \quad\Leftrightarrow\quad 10<x$$

x	-20		10		20
f '(x)		+	0	–	
f(x)	$70e^{-7}$	↗	$10e^{-1}$	↘	-10e

$f(-20)=70e^{-7}=0,06$ à 10^{-2} près $\quad f(20)=-10e=-27,18$ à 10^{-2} près

Le maximun de f est f(10)= $10e^{-1}$ (3,37 à 10^{-2} près).

2.a. Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [-20;10] $f(x)\geqslant f(-20)>0$ donc l'équation f(x)=-2 n'admet pas de solution dans l'intervalle [-20;10].

Sur l'intervalle [10;20], f est continue et strictement décoissante et -2 appartient à l'intervalle [f(20);f(10)] le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation f(x)=-2 admet une unique solution α appartenant à l'intervalle [10;20]

<u>Conclusion</u>

L'équation f(x)=-2 admet une unique solution α appartenant à l'intervalle [-20;20].

3.b. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$f(15)=0$ et $f(16)=-2,44$ donc $15<\alpha<16$

$f(15,8)-1,6e^{0,16}=-1,88$ et $f(15,9)=-2,15$ donc **$15,8<\alpha<15,9$.**

3. On note F la fonction définie sur [-20;20] par : $(x)=(-10x+200)e^{0,2x-3}$.

Le logiciel de calcul formel nous donne :

$F'(x)=f(x)$ puis $f'(x)$ puis $f''(x)=(-0,08x+0,4)e^{0,2x-3}$.

F est une primitive de f .

3.a. $\displaystyle\int_{10}^{15} f(x)\,dx=F(15)-F(10)=50e^0-100e^{-1}=50-\frac{100}{e}$.

3.b. Le signe de $f''(x)$ est le signe de : -0,08x+0,4.

$$-0,08x+0,4\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0,4\geqslant 0,08x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{0,08}{0,4}\geqslant x \quad\Leftrightarrow\quad 5\geqslant x$$

$$-0,08x+0,4<0 \quad\Leftrightarrow\quad 5<x$$

x	0		5		10
f ''(x)		+	0	–	

Donc le plus grand intervalle sur lequel f est concave est l'intervalle [5;20].

Partie B

1. Le dénivelé de la nouvelle piste est : $f(10)-f(0)=\frac{10}{e}-30e^{-3}=2{,}185\,\text{km}$

Soit **2185 m.**

2. Le coefficient directeur de la tangente au point $M(x\,;f(x))$ de la courbe est égale à $f'(x)$.
On détermine les variations de la fonction f'.

x	0		5		10
f ''(x)		+	0	−	
f '(x)	↗		$2e^{-2}$		↘

$f'(5)=2e^{-2}=0{,}27$ à 10^{-2} près.
Donc la pente maximale est 27 %, inférieure à 40 % mais supérieure à 25 %.
Conclusion
La piste sera classée rouge.