Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

La renouée du Japon est une plante à croissance très rapide et très invasive.
Un jardinier souhaite faire disparaître de son terrain cette espèce qui occupe une superficie de $120\,m^2$ au 1^{er} janvier 2017. Pour cela, chaque année au printemps, il procède à un arrachage qui permet de réduire de 10 % la superficie de terrain envahi l'année précédente. Cependant, cette espèce de plante ayant une puissance de dissimination très importante, de nouvelles pousses apparaissent chaque été et envahissent une nouvelle parcellede terrain de superficie $4\,m^2$.

1. Déterminer la superficie de terrain par cette plante au 1^{er} janvier 2018.
On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente la surficie de terrain en m^2 envahi par la renouée du Japon au 1^{er} janvier 2017+n.
La suite (u_n) est définie par $u_0=120$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1}=0{,}9\,u_n+4$.

2. Le jardinier souhaite connaître l'année à partir de la quelle il aura réduit au moins de moitié la superficie de terrain envahi par rapport au 1^{er} janvier 2017.
Recopier et compléter les lignes L1, L3 , L4 et L7 de l'algorithme suivant afin qu'il détermine l 'année souhaitée.
On ne demande pas de faire fonctionner l'algorithme.

L1 U prend la valeur . . . .
L2 N prend la valeur 0
L3 Tant que . . . .
L4 U prend la valeur . . . .
L5 N prend la valeur N+1
L6 Fin Tant que
L7 Afficher . . . .

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n=u_n-40$.
3.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raisobn q=0,9 et préciser le premier terme.
3.b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
3.c. Justifier que $u_n=80\times 0{,}9^n+40$,pour tout entier naturel n.

4.a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :
$80\times 0{,}9^n \leqslant 60$
4.b. En déduire l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1^{er} janvier de l'année 2017 ?

5. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complétement la plante de son terrain ?
Justifier la réponse.

CORRECTION

1. Le jardinier a procédé, au printemps 2017, à l'arrachage qui permet de réduire de 10 % la superficie occupée par la plante au 1er janvier 2017 soit $\frac{10}{100}\times 120=12\ \text{m}^2$ mais pendant l'été 2017 de nouvelles pousses ont envahi $4\ \text{m}^2$ de terrain.

Au 1er janvier 2018, la superficie du terrain envahi est égale à : **120-12+4 = 112** m^2

(u_n) est la suite définie par $u_0=120$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}9u_n+4$.

2.

L1	U prend la valeur **120**
L3	Tant que **U > 60**
L4	U prend la valeur **0,9U+4**
L7	Afficher **N**

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n=u_n-40$ (donc $u_n=v_n+40$).

3.a. Pour tout entier naturel n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-40=0{,}9u_n+4-40=0{,}9(v_n+40)-36=0{,}9v_n+36-36=0{,}9v_n$

(v_n) **est la suite géométrique de premier terme** $v_0=u_0-40=120-40$ **=80 et de raion q = 0,9.**

3.b. Pour tout entier naturel n :

$v_n=v_0q^n=80\times 0{,}9^n$

3.c. Pour tout entier naturel n :

$u_n=v_n+40=80\times 0{,}9^n+40$

4.a. $80\times 0{,}9^n+40\leqslant 60 \quad\Leftrightarrow\quad 80\times 0{,}9^n\leqslant 20 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}9^n\leqslant\frac{20}{80}=0{,}25$

ln est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$.

$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}9^n)\leqslant\ln(0{,}25) \quad\Leftrightarrow\quad n\times\ln(0{,}9)\leqslant\ln(0{,}25)$

$0<\ 0{,}25\ <\ 1$ donc $\ln(0{,}25)<0$

$\Leftrightarrow \quad n\geqslant\frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}9)}$ or $\frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}9)}=13{,}16$ à 10^{-2} près

L'ensemble des solutions de l'inéquation dans l'ensemble des entiers naturels est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égal à 14.

4.b. La surperficie envahie par la plante sera réduite de moitié par rapport au 1er janvier 2017, **au 1er janvier 2017+14 = 2031.**

5. $0<0{,}9<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n=0$.

Le jardinier n'arrivera pas à faire disparaître complétement la plante. Il restera toujours au uoins 40 m^2 **de terrain envahi.**