Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un parti politique organise une élection en son sein pour désigner son candidat à l'élection prédisentielle. Seuls les adhérents de ce parti peuvent voter à cette élection et ils ont le choix entre deux candidats A et B.
Pendant la campagne électorale, certains adhérents indécis changent d'avis.
Un institut de sondage consulte chaque mois le même échantillon d'adhérents et recueille leurs intentions de vote.
Il observe que l'évolution de l'état de l'opinion peut être modélisé de la façon suivante.
Chaque mois :

. 5 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat A le mois précédent change d'avis et déclarent vouloir voter pour le candidat B.
. 3 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat B le mois précédent déclarent vouloir voter pour le candidat A.

Au début de la campagne électorale, 65 % des adhérents déclarent vouloir voter pour le candidat A.
On représente ce modèle par un graphe probabiliste ($\mathcal{G}$) de sommets A et B où :

. A est l'événement : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A » ;;
. B est l'événement : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B ».

Dans la suite de l'exercice, on note :

. a_n la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A, le $n^{\text{ième}}$ mois après le début de la campagne. On a donc $a_0=0{,}65$.
. b_n la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B, le $n^{\text{ième}}$ mois après le début de la campagne.

On note $P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ l'état probabiliste correspondant aux intentions de vote le $n^{\text{ième}}$ mois aprés le début de la campagne. On a donc $P_0=\begin{pmatrix}0{,}65 & 0{,}35\end{pmatrix}$.

1.a. Dessiner le graphe probabiliste ($\mathcal{G}$) de sommets A et B.
1.b. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

2. Démontrer que $P_1=\begin{pmatrix}0{,}628 & 0{,}372\end{pmatrix}$

3. On note $P=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.
3.a. Démontrer que les nombres a et b sont solutions du système : $\begin{cases}0{,}05\,a-0{,}03\,b=0\\ a+b=1\end{cases}$
3.b. Résoudre le système précédent.
3.c. Interpréter dans le contexe de l'exercice la solution obtenue à la question **3.b.**

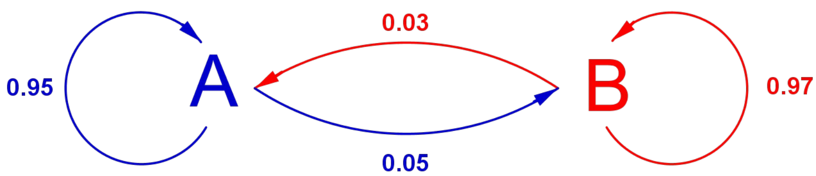
4.a. Démontrer que pour tout entier naturel n,on a $a_{n+1}=0{,}92\,a_n+0{,}03$.
4.b. On considère la suite (v_n) définie poutout entier naturel n, par : $v_n=a_n-0{,}375$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison q=0,92 et préciser le premier terme.
4.c. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et en déduire que : $a_n=0{,}275\times 0{,}95^n+0{,}375$.

5. La campagne électorale dure 11 mois. Si la modélisation de l'institut de sondage est valable, quel candidat sera probablement élu ? Justifier la réponse.

CORRECTIO.N

1.a.

- A est l'état : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A »
- B est l'état : « l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B ».
  A et M sont les sommet du graphe.
- 5 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat A le mois précédent, changent d'avis et déclarent vouloir voter pour le candidat B donc 95 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat A le mois précédent, ne changent pas d'avis et déclarent vouloir voter pour le candidat A.
  Conséquences
  Le poids de l'arête AB est 0,05.
  Le poids de l'arête AA est 0,95.
- 3 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat B le mois précédent, changent d'avis et déclarent vouloir voter pour le candidat A donc 97 % des adhérents ayant déclarer vouloir voter pour le candidat B le mois précédent ne changent pas d'avis et déclarent vouloir voter pour le candidat B.
  Conséquences
  Le poids de l'arête BA est 0,03.
  Le poids de l'arête BB est 0,97.
- On obtient le graphe probabiliste suivant :



1.b. L'ordre des sommets est A puis B.
Dans cet exercice, on utilise les matrices lignes.

La matrice de transition M associée à ce graphe est : $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA : 0,95
m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,05
m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,03
m_{22} est le poids de l'arête BB : 0,97
$M=\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}03 & 0{,}97 \end{pmatrix}$

2. $P_0=\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \end{pmatrix}$

$P_1=P_0M=\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}03 & 0{,}97 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}65\times 0{,}95 + 0{,}35 - 0{,}03 & 0{,}65\times 0{,}05 + 0{,}35\times 0{,}97 \end{pmatrix}$

$P_1=\begin{pmatrix} 0{,}628 & 0{,}372 \end{pmatrix}$

3. On note $P=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.

3.a. On a : $P=PM$ et $a+b=1$

$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}03 & 0{,}97 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}95\,a + 0{,}03\,b & 0{,}05a + 0{,}97b \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a= 0{,}95a+0{,}03\,b \\ b=0{,}05\,a+0{,}097b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}05\,a-0{,}03\,b=0 \\ -0{,}05\,a+0{,}03\,b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \{0{,}05a-0{,}03\,b=0$

$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ état stable $\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}05\,a-0{,}03\,b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$

3.b. $\begin{cases} 0,05a - 0,03b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a - 3b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$

$b = 1 - a$

$5a - 3(1-a) = 0 \Leftrightarrow 5a + 3a - 3 = 0 \Leftrightarrow 8a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{8} = 0,375$

et $b = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} = 0,625$

$P = (0,375 \quad 0,625)$

3.c **À long terme le candidat obtiendrait 62,5 % des voix et le candidat A 37,5 % des voix.**

4.a. Pour tout entier naturel n :

$P_{n+1} = P_n M \Leftrightarrow (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n)\begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (0,95a_n + 0,03b_n \quad 0,05a_n + 0,97b_n) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 0,95a_n + 0,03b_n \\ b_{n+1} = 0,05a_n + 0,97b_n \end{cases}$

donc $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,03b_n$

Pour tout entier naturel n : $a_n + b_n = 1$.

On obtient $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,03(1 - a_n) = 0,95a_n + 0,03 - 0,03a_n$

$a_{n+1} = 0,92a_n + 0,03$

4.b. Pour tout entier naturel n

$v_n = a_n - 0,375$ donc $a_n = v_n + 0,375$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 0,375 = 0,92a_n + 0,03 - 0,375 = 0,92(v_n + 0,375) - 0,345 = 0,92v_n + 0,345 - 0,345$

$v_{n+1} = 0,92v_n$

$v_0 = u_0 - 0,375 = 0,65 - 0,375 = 0,275$

(v_n) **est la suite géométrique de premier terme v_0 =0,275 etde raison q=0,92.**

4.c. Pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times q^n = 0,275 \times 0,92^n$

et $u_n = v_n + 0,375 = 0,275 \times 0,92^n + 0,375$

5. $a_{11} = 0,275 \times 0,92^{11} + 0,375$ =0,485 à 10^{-3} près.

Et $b_{11} = 1 - a_{11} = 0,515$.

<u>Conclusion</u>

Le candidat B sera probablement élu avec 51,5 % des voix.