Exercice 1 6 points

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième près.

1. Un super marché dispose de plusieurs caisses. Un client qui se présente à une caisse doit attendre un certain temps T_1 avant d'être pris en charge par le caissier. On considère que ce temps d'attente T_1 exprimé en minute, est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [0;12].

1.a. Quelle est la probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes avant d'être pris en charge ?

1.b. Quel est le temps moyen d'attente à une caisse ?

2. Le gérant du magasin décide de mettre à disposition des clients des caisses automatiques, de façon à réduire le temps d'attente pour les clients ayant un panier contenant peu d'articles.
Le temps T_2, exprimé en minute, à chacune de ces caisses automatiques est modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart-type 1,5.
Calculer la probabilité que le temps d'attente à une caisse automatique soit compris entre 0,75 minute et 6 minutes.

3. Ces caisses automatiques tombent souvent en panne. On donne les informations suivantes.

- Le nombre de caisses automatiques est $n=10$.
- La probabilité qu'une caisse automatique tombe en panne pendant une journée donnée est $p=0{,}1$.
- Une panne constatée sur une caisse automatique n'influence pas les autres caisses automatiques.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de caisses automatiques qui tombent en panne une journée donnée.

3.a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

3.b. Calculer la probabilité pour qu'aucune caisse automatique ne tombe en panne pendant une journée donnée.

4. Sur la devanture de son magasin, le gérant du super marché affiche :
« Plus de 90 % des clients de notre magasin sont satisfaits par la mise en place de nos caisses automatiques ».
Une association de consommateurs souhaite examiner cette affirmation. Pour cela, elle réalise un sondage : 860 clients sont interrogés et 763 d'entre eux se disent satisfaits par la mise en place de ces caisses automatiques.
Cela remet-il en question l'affirmation du gérant ?

CORRECTION

1.a. T_1 est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;12]$.
« Un client attend au moins 5 minutes avant d'être pris en charge » est l'événement : $(5< T_1)$.
$P(5< T_1)=\dfrac{12-5}{12-0}=\dfrac{7}{12}$ **= 0,583.**

1.b. Le temps moyen d'attente à une caisse est égal à l'espérance mathématique de T_1 :
$E(T_1)=\dfrac{0+12}{2}$ = **6 minutes.**

2. T_2 est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 5 et d'écart-type 1,5.
En utilisant la calculatrice, on obtient :
$P(0{,}75< T_2 < 6)$ = **0,745.**

3.a. On choisit au hasard une des dix caisses automatiques pendant une journée donnée.
On considère l'épreuve de bernoulli suivante :
Succès S « la caisse tombe en panne » p=0,1 est la probabilité de succès.
Echec $\bar{S}$ « la caisse ne tombe pas en panne » q=1-p=1-0,1=0,9 est la probabilité de l'échec.
L'énoncé précise : une panne constatée sur une caisse n'influence pas les autres caisses.
Donc les pannes sur les caisses automatiques sont indépendantes.
X est la variable aléatoire qui est égale au nombre de caisses automatiques tombant en panne une journée donnée c'est à dire au nombre de succès en dix épreuves.
La loi de probabilité de X et la loi binomiale de paramètres n =10 et p = 0,1.

3.b. Si k est un entier compris entre 0 et 10.
$P(X=k)=\binom{10}{k}p^k q^{10-k}=\binom{10}{k}0{,}1^k\times 0{,}9^{10-k}$
Pour k = 0 $P(X=0)=0{,}9^{10}$ = **0,349.**

4. Le gérant affirme que la probabilité qu'un client choisi au hasard soit satisfait des caisses automatiques est : p = 0,9.
La taille de l'échantillon est n=860.
$n=860 \geqslant 30$ $np=860\times 0{,}9=774 \geqslant 5$ $n(1-p)=860\times 0{,}1=86 \geqslant 5$
On détermine un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
$I=\left[p-1{,}96\times\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}};p+1{,}96\times\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]=[0{,}9-1{,}96\times\sqrt{\dfrac{0{,}9\times 0{,}1}{860}};0{,}9+1{,}96\times\sqrt{\dfrac{0{,}9\times 0{,}1}{[860}}]$
$1{,}96\times\sqrt{\dfrac{0{,}9\times 0{,}1}{860}}=0{,}020$ à 10^{-3} près
$I=[0{,}880;0{,}920]$
La fréquence observée sur l'échantilon est : $f=\dfrac{763}{860}=0{,}887$ à 10^{-3} près.
On ne remet pas en cause l'affirmation du gérant avec un risque d'erreur de 5 %.