

Exercice 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Au 1^{er} janvier 2017, une association sportive compte 900 adhérents. On constate que chaque mois :

- . 25 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- . 12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.

Partie A

On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite (u_n) telle que :

$$u_0 = 900 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 0,75u_n + 12.$$

Le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents au bout de n mois.

1. Déterminer une estimation du nombre d'adhérents au 1^{er} mars 2017.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 48$ pour tout entier naturel n .
 - 2.a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
 - 2.b. Préciser v_0 et exprimer v_n en fonction de n .
 - 2.c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 852 \times 0,75^n + 48$.
3. La présidente de l'association déclare qu'elle démissionnera si le nombre d'adhérents devient inférieur à 100. Si on fait l'hypothèse que l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit de la même façon, faudra-t-il que la présidente démissionne ?
Si oui, au bout de combien de mois ?

Partie B

Chaque adhérent verse une cotisation de 10 euros par mois. Le trésorier de l'association souhaite prévoir le montant total des cotisations pour l'année 2017.

Le trésorier souhaite utiliser l'algorithme suivant dans lequel la septième et la dernière ligne sont restées incomplètes (pointillés).

1. Recopier et compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le montant total des cotations de l'année 2017.

Variables :	S est un nombre réel N est un entier U est un nombre réel
Initialisation :	S prend la valeur 0 U prend la valeur 900
Traitement :	Pour N allant de 1 à 12 Affecter à S la valeur Affecter à U la valeur 0,75U+12 Fin Pour
Sortie :

2. Quelle est la somme totale des cotisations perçues par l'association pendant l'année 2017 ?

CORRECTION

Partie A

1. La suite (u_n) est définie par $u_0=900$ et pour tout entier naturel n $u_{n+1}=0,75u_n+12$
 $u_1=0,75 \times 900+12=687$
 $u_2=0,75 \times 687+12=527,25$

Une estimation du nombre d'adhérents au 1^{er} mars 2017 est : 527.

2. Pour tout entier naturel n : $v_n=u_n-48$ donc $u_n=v_n+48$.

- 2.a. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-48=0,75u_n+12-48=0,75(v_n+48)-36=0,75v_n+36-36=0,75v_n.$$

Donc (v_n) est une géométrique de raison $q=0,75$.

- 2.b. $v_0=u_0-48=900-48=852$.

Pour tout entier naturel n :

$$v_n=v_0 \times q^n=852 \times 0,75^n$$

- 2.c. Pour tout entier naturel n :

$$u_n=v_n+48=852 \times 0,75^n+48$$

3. $0 < 0,75 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 48$.

À long terme, le nombre d'adhérents sera voisin de 48, **il faudra que la présidente démissionne.**

On résout :

$$u_n < 100 \Leftrightarrow 852 \times 0,75^n + 48 < 100 \Leftrightarrow 852 \times 0,75^n < 100 - 48 \Leftrightarrow 0,75^n < \frac{52}{852}$$

\ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow \ln(0,75^n) < \ln\left(\frac{52}{852}\right) \Leftrightarrow n \times \ln(0,75) < \ln(52) - \ln(852)$$

$0 < 0,75 < 1$ donc $\ln(0,75) < 0$.

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(52) - \ln(852)}{\ln(0,75)} = 9,720 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

n est un entier naturel donc $n \geq 10$

Conclusion

Le 1^{er} novembre 2017, la présidente devra démissionner.

Partie B

- 1.

Variables :	S est un nombre réel N est un entier U est un nombre réel
Initialisation :	S prend la valeur 0 U prend la valeur 900
Traitement :	Pour N allant de 1 à 12 Affecter à S la valeur S+10U Affecter à U la valeur $0,75U+12$ Fin Pour
Sortie :	Afficher S

$$2. S = u_0 + u_1 + \dots + u_{11} = v_0 + 48 + v_1 + 48 + \dots + v_n + 48$$

$$S = v_0 + v_1 + \dots + v_{11} + 12 \times 48$$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_{11} = 852 \times \frac{1 - 0,75^{12}}{1 - 0,75} = 3300 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}$$

$$12 \times 48 = 576 ;$$

La somme totale des cotisations perçues par l'association pendant l'année 2017, est :

$$3300 + 576 = 3876 \text{ €.}$$