Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

Dans un jeu vidéo, une suite d'énigmes est proposée au joueur. Ces énigmes sont classées en deux catégories : les énigmes de catégorie A sont des énigmes faciles ; les énigmes de catégorie B sont les énigmes difficiles.
Le choix des énigmes successives est aléatoire et vérifie les conditions suivantes :

. la première énigme est facile ;
. si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit difficile est égale à 0,15 ;
. si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante, soit facile est égale à 0,1.

Pour $n \geqslant 1$, on note :

. a_n la probabilité que l'énigme numéro n soit facile (de catégorie A) ;
. b_n la probabilité que l'énigme numéro n soit difficile (de catégorie B) ;
. $P_n = (a_n \quad b_n)$ l'état probabiliste pour l'énigme numéro n.

1. Donner la matrice P_1.

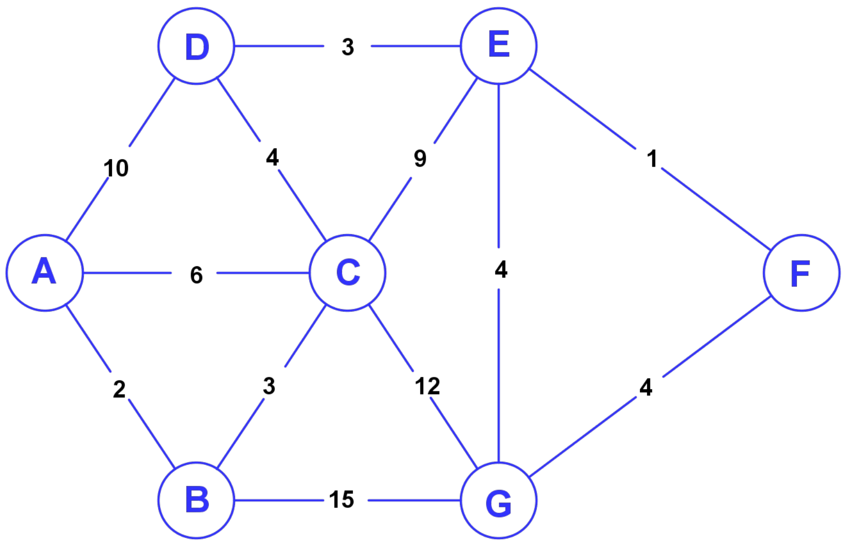
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

3. Écrire la matrice M associée à ce graphe, puis donner la matrice P_2.

4. Sachant que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $a_n + b_n = 1$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
$a_{n+1} = 0{,}75\, a_n + 0{,}1$.

5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose : $v_n = u_n - 0{,}4$.
5.a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
5.b. Exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$a_n = 0{,}8 \times 0{,}75^n + 0{,}4$.
5.c. Préciser la limite de la suite (v_n).
5.d. Une revue spécialisée dans les jeux vidéo indique que plus le joueur évolue dans le jeu, plus il risque d'avoir à résoudre des énigmes difficiles.
Que penser de cette analyse ?

Partie B



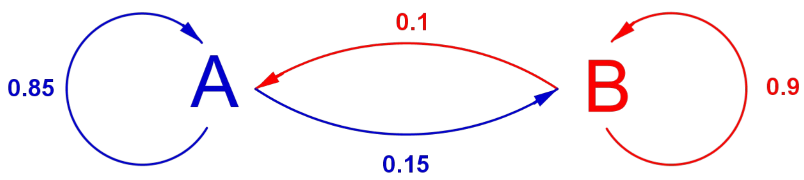
Une des énigmes consiste à réaliser un parcours en un minimum de temps.
Le graphe précédent schématise le parcours.
L'étiquette de chaque arête indique le temps de parcours en minute entre deux sommets qu'elle relie.
Par exemple, le temps de parcours de C vers D ou de D vers C, est égal à quatre minutes.

Quel chemin le joueur doit-il prendre pour aller de A vers G en minimisant son temps de parcours ?
Expliquer la démarche utilisée.

CORRECTION

1. L'énoncé précise :
La première énigme est facile (de catégorie A) donc $a_1=1$ et $b_1=0$ donc $P_1=(1 \quad 0)$.

2. A est l'état « l'énigme est facile (de catégorie A) »
. B est l'état « l'énigme est difficile (de catégorie B) »
. Si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit difficile est égale à 0,15 donc la probabilité que l'énigme suivante soit facile est égale à 1-0,15=0,85.
Conséquences
Le poids de l'arête AB est : 0,15
Le poids de l'arête AA est : 0,85
. Si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante soit facile est égale à 0,1 donc la probabilité que l'énigme suivante soit difficile est égale à 1-0,1=0,9.
Conséquences
Le poids de l'arête BA est : 0,1
Le poids de l'arête BB est : 0,9
. On obtient le graphe probabiliste suivant :



3. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique.
Dans cet exercice, on utilise les matrices lignes.
La matrice de transition M associée à ce graphe est : $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA est 0,85
m_{12} est le poids de l'arête AB est 0,15
m_{21} est le poids de l'arête BA est 0,1
m_{22} est le poids de l'arête BB est 0,9

$$M=\begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

$$P_2=P_1M=(1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}=(0,85 \quad 0,15)$$

4. Pour tout entier naturel n, non nul.
$a_n+b_n=1$ et $P_{n+1}=P_nM$

$$(a_{n+1} \quad b_{n+1})=(a_n \quad b_n)\begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}=(0,85a_n+0,1b_n \quad 0,15a_n+0,9b_n)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1}=0,85a_n+0,1b_n \\ b_{n+1}=0,1a_n+0,9b_n \end{cases}$$

donc $a_{n+1}=0,85a_n+0,1b_n$ et $b_n=1-a_n$
On obtient :
$a_{n+1}=0,85a_n+0,1(1-a_n)=0,75a_n+0,1$.

5. Pour tout entier naturel n, non nul :
$v_n=a_n-0,4$ donc $a_n=v_n+0,4$.

5.a. Pour tout entier naturel non nul n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-0{,}4=0{,}75\,a_n+0{,}1-0{,}4=0{,}75(v_n+0{,}4)-0{,}3=0{,}75\,v_n+0{,}3-0{,}3=0{,}75\,v_n$

$v_1=a_1-0{,}4=1-0{,}4=0{,}6$

(v_n) **est la suite géométrique de premier terme** $v_1=0{,}6$ **et raison q=0,75.**

5.b. Pour tout entier naturel non nul n :

$v_n=v_1\times q^{n-1}=0{,}6\times 0{,}75^{n-1}$

Remarque

$0{,}8\times 0{,}75^n=0{,}8\times 0{,}75\times 0{,}75^{n-1}=0{,}6\times 0{,}75^{n-1}=v_n$

$u_n=v_n+0{,}4=0{,}8\times 0{,}75^n+0{,}4$

5.c. $0<0{,}75<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.$

5.d. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0{,}4$

Pour de grandes valeurs de n, la valeur de a_n sont voisines de 0,4, celles de b_n voisines de 0,6.
Donc la probabilité d'avoir des énigmes difficiles est supérieure à celle d'avoir des énigmes faciles.

Remarques

- Pour tout ebtier naturel n, non nul, on a ; $a_n=v_n+0{,}4$ et $b_n=0{,}6-v_n$.
  On peut vérifier que les suites (v_n) et (a_n) sont décroissantes et que la suite (b_n) est croissante.
  On penser conclure que plus le joueur évolue dans le jeu, plus il risque d'avoir à résoudre des énigmes difficiles.
- Toutefois on peut aussi vérifier que $P=(0{,}4 \quad 0{,}6)$ est l'état stable c'est à dire pour n assez grand le jeu se stabilise, il y aura 40 % d'énigmes faciles et 60 % d'énigmes difficiles.
- Dernière remarque (pour préciser n assez grand)
  Si on calcule les probabilités à 10^{-2} près alors on peut vérifier que si $n\geqslant 16$ alors $a_n=0{,}4$ à 10^{-2} près et $b_n=0{,}6$ à 10^{-2} près.

Partie B

On utilise l'algorithme de Dijkstra.

A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	2(A)	6(A)	10(A)	∞	∞	∞
	2(A)	5(B)	10(A)	∞	∞	17(B)
		5(B)	9(C)	14(C)	∞	17(B)
			9(C)	12(D)	∞	17(B)
				12(D)	13(E)	16(E)
					13(E)	16(E)
						16(E)

Le plus court chemin : ABCDEG 16 minutes.

