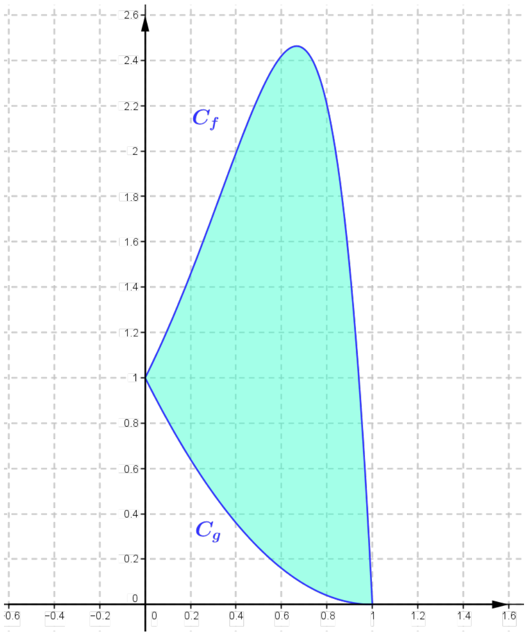
Exercice 3 6 points

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies par :
pour tout réel x de [0;1], $f(x)=(1-x)e^{3x}$ et $g(x)=x^2-2x+1$.
Leurs courbes représentatives seront notées C_f et C_g .



Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

dériver (1-x)*exp(3x)
: -3x*exp(3*x)+2*exp(3*x)
factoriser -3x*exp(3*x)+2*exp(3*x)
: exp(3x)*(-3x+2)
factoriser(dériver(exp(3x)(-3x+2))
: 3*exp(3*x)(1-3x)

Lecture : la dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x)=-3xe^{3x}+2e^{3x}$ *, ce qui, après factorisation, donne :* $f'(x)=(-3x+2)e^{3x}$.

1. Étudier sur [0;1], le signe de la fonction dérivée f' , puis donner le tableau de variation de f sur $[0;1]$ en précisant les valeurs utiles.

2. La courbe C_f possède un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées.

Partie B

On se propose de calculer l'aire de la partie colorée sur le grahique.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives $(1;0)$ et $(0;1)$ sont des points communs aux courbes C_f et C_g .

2. On admet que : pour tout x dans [0;1], $f(x)-g(x)=(1-x)[e^{3x}-1+x]$

2.a. Justifier que pour tout x dans [0;1], $e^{3x}-1 \geqslant 0$.

2.b. En déduire que pour tout x dans [0;1], $e^{3x}-1+x \geqslant 0$.

2.c. Étudier le signe de $f(x)-g(x)$ pour tout x dans [0;1].

3.a. Calculer $\int_0^1 g(x)\,dx$.

3.b. On admet que :

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{e^3-4}{9} .$$

Calculer l'aire S, en unité d'aire de la partie colorée.
Arrondir le résultat au dixième.

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1], $f'(x)=(-3x+2)e^{3x}$ et $e^{3x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de (-3x+2).

$-3x+2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \geqslant 3x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} \geqslant x$

On donne le signe de f dans le tableau de variation de f.

x	0		$\frac{2}{3}$		1
f '(x)		+	0	−	
f(x)	1	↗	$\frac{e^2}{3}$	↘	0

$f(x)=(1-x)e^{3x} \qquad f(0)=1 \qquad f(1)=0 \qquad f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}e^2=2{,}46$ à 10^{-2} près.

2. Le logiciel de calcul formel nous donne :
pour tout nombre réelx de l'intervalle [0;1] $f''(x)=3(1-3x)e^{3x}$;

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$

$f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-3x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{3}$

$f''(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-3x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{3}$

x	0		$\frac{1}{3}$		1
$f''(x)$		+	0	−	

<u>Conséquence</u>

Le point d'abscisse $\frac{1}{3}$ de la courbe C_f est un point d'inflexion.

L'ordonnée de ce point est $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}e=1{,}81$ à 10^{-2} près.

Partie B

1. On vérifie : $f(0)=(1-0)e^0=1$ et $g(0)=0^2-2\times 0+1=1$ donc le point de coordonnées (0;1) appartient aux courbes C_f et C_g.
$f(1)=(1-1)e^3=0$ et $g(0)=1^2+2\times 1+1=0$ donc le point de coordonnées (1;0) appartient aux courbes C_f et C_g.

2.a. On considère la fonction h définie pour tout s de l'intervalle [0;1] par $f(x)=e^{3x}$.
$h'(x)=3e^{3x} > 0$ donc h est strictement croissante sur [0;1].

Pour tout x de l'intervalle [0;1] : $h(x) \geqslant h(0) \Leftrightarrow e^{3x} \geqslant 1 \Leftrightarrow e^{3x}-1 \geqslant 0$

2.b. Pour tout x de l'intervalle [0;1], $e^{3x}-1 \geqslant 0$ et $1 \geqslant x \geqslant 0$ donc $e^{3x}-1+x \geqslant 0$.

2.c. Pour tout x dans [0;1] : $f(x)-g(x)=(1-x)(e^{3x}-1+x)$

x	0		1
1-x		+	0
$e^{3x}-1+x$	0	+	
f(x)-g(x)	0	+	0

3.a. $g(x)=x^2-2x+1$

$G(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$

G est une primitive de g sur [0;1]

$\int_0^1 g(x)\,dx=G(1)-G(0)=\frac{1}{3}-1+1=\frac{1}{3}$

3.b. $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{e^3-4}{9}$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;1], $f(x)-g(x) \geqslant 0$, donc l'aire, en unité d'aire, de la partie de plan comprise entre les deux courbes est : $S = \int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx$

$S=\frac{e^3-4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{e^3-7}{9}$ = **1,5 U.A. à 10^{-1} près.**