Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans une commune, l'école de musique propose des cours d'éveil musical.
En 2013, 20 % des enfants de la commune suivaient les cours d'éveil musical de cette école. Chaque année, 70 % des enfants inscrits restent à l'école l'année suivante, et par ailleurs, 20 % des enfants de la commune qui n'y étaient pas inscrits viennent s'y ajouter.
Pour tout entier naturel n, on note :

. c_n la proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical en (2013+n),
. d_n la proportion des enfants de la commune qui ne sont pas inscrits à cet éveil musical en (2013+n).
. $E_n=\begin{pmatrix} c_n & d_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année (2013+n).

Ainsi, on a $E_0=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.
On choisit au hasard un enfant de la commune.

Partie A

1. Traduire la situation par un graphe probabiliste. On note :
. C l'état « l'enfant est inscrrit au cours d'éveil musical »
. D l'état « l'enfant n'est pas inscrit au cours d'éveil musical »

2. Déterminer la matrice A de transition, c'est à dire la matrice vérifiant, pour tout entier naturel n : $E_{n+1}=E_n\times A$.

3. Déterminer E_1 et E_2 .

4. Déterminer l'état probabiliste stable en justifiant votre réponse. Interpréter les résultats.

Partie B

1. On rappelle que pour tout entier naturel n, on a $c_n+d_n=1$.
Justifier que pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1}=0{,}5\,c_n+0{,}2$.
On admet dans la suite de l'exercice que pour tout entier naturel n, $c_n=-0{,}2\times0{,}5^n+0{,}4$.

2. Montrer que la suite (c_n) est croissante.

3.a. Proposer un algorithme affichant la proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical à partir de 2013 jusqu'à l'année (2013+n), pour un nombre d'années n saisi par l'utilisateur.
3.b. La proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical franchira-t-elle le seuil de 39 %? Si oui, indiquer l'année en expliquant la démarche.

4. Le direction de cette école affirme que si ce modèle d'évolution reste valable, la proportion d'enfants de la commune inscrits à cet éveil musical dépassera le seuil de 50 %.
Peut-on valider cette affirmation ?
Argumenter la réponse.

CORRECTION

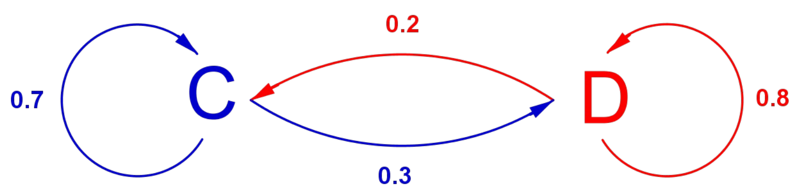
Partie A

1. On note :
C l'état « l'enfant est inscrit au cours d'éveil musical »
D l'état « l'enfant n'est pas inscrit au cours d'éveil musical »
C et D sont les deux sommets de l'arbre probabiliste.

. Chaque année, 70 % des enfants inscrits restent dans l'école l'année suivante (donc 30 % des enfants inscrits ne restent pas à l'école l'année suivante).
<u>Conséquences</u>
Le poids de l'arête CC est : 0,7.
Le poids de l'arête CD est : 0,3.

. Chaque année, 20 % des enfants de la commune qui n'étaient inscrits à l'école viennent s'y ajouter (donc 80 %restent non inscrits à l'école).
<u>Conséquences</u>
Le poids de l'arête DC est : 0,2.
Le poids de l'arête DD est : 0,8.

. On obtient por graphe probabiliste :



2. L'ordre des sommets est l'odre alphabétique.
Dans cet exercice on utilise des matrices lignes.

La matrice de transition A du graphe probabiliste est : $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

a_{11} est le poids de l'arête CC : 0,7
a_{12} est le poids de l'arête CD : 0,3
a_{21} est le poids de l'arëte DC : 0,2
a_{22} est le poids de l'arête DD : 0,8

$A=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

3. $E_0=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

$E_1=\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \end{pmatrix}=E_0\times A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,2\times 0,7+0,8\times 0,2 & 0,2\times 0,3+0,8\times 0,8 \end{pmatrix}$

$E_1=\begin{pmatrix} 0,14+0,16 & 0,06+0,64 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$

$E_2=\begin{pmatrix} c_2 & d_2 \end{pmatrix}=E_1\times A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,3\times 0,7+0,7\times 0,2 & 0,3\times 0,3+0,7\times 0,8 \end{pmatrix}$

$E_2=\begin{pmatrix} 0,21+0,14 & 0,09+0,56 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$

4. $E=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ est l'état stable si et seulement si $\begin{cases} E=E\times A \\ x+y=1 \end{cases}$.

$E=E\times A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,7x+0,2y & 0,3x+0,8y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0,7x+0,2y \\ y=0,3x+0,8y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,3x+0,2y=0 \\ 0,3x-0,2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \{0,3x-0,2y=0$

On résout le système :

$$\begin{cases} 0{,}3x - 0{,}2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$3x - 2(1-x) = 0 \Leftrightarrow 5x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$y = 1 - x = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

Conclusion

L'état stable est : E= $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

À long terme, 40 % des enfants de la commune seront inscrits à l'école et 60 % des enfants de la commune ne seront pas inscrit à l'école.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n :

$$E_{n+1} = E_n \times A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{n+1} = 0{,}7c_n + 0{,}2d_n \\ d_{n+1} = 0{,}3c_n + 0{,}8d_n \end{cases}$$

et $d_n = 1 - c_n$

donc $c_{n+1} = 0{,}7c_n + 0{,}2(1 - c_n) = 0{,}7c_n + 0{,}2 - 0{,}2c_n$

Conséquence

$c_{n+1} = 0{,}5c_n + 0{,}2$

2. On admet que pour tout entier naturel n :

$c_n = -0{,}2 \times 0{,}5^n + 0{,}4$

Pour tout entier naturel n :

$$c_{n+1} - c_n = -0{,}2 \times 0{,}5^{n+1} + 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}5^n - 0{,}4 = 0{,}2 \times 0{,}5^n(-0{,}5 + 1) = 0{,}2 \times 0{,}5^n \times 0{,}5 > 0$$

Conséquence

La suite (c_n) est croissante.

3.a. Algorithme

Variables :	k et n sont des entiers naturels C est un nombre réel
Initialisation :	Saisir n C prend la valeur 0,2

Traitement :	Pour tout k compris entre 0 et n, faire
	    Afficher (2013+k) et C
	    C prend la valeur 0,5C+0,2
	Fin Pour

3.b. Pour l'état stable, 40 % des enfants de la commune sont inscrits à l'école et la suite (c_n) est croissante donc la proportion des enfants de la commune inscrits au cours d'éveil musical franchira le seuil de 39 %

Pour déterminer l'année :

. On peut utiliser l'algorithme précédent

2013	0.2
2014	0.3
2015	0.35
2016	0.375
2017	0.38075
2018	0.39375

On obtient : **2018.**

- On peut résoudre une inéquation

$c_n \geqslant 0,39 \quad \Leftrightarrow \quad -0,2\times0,5^n+0,4 \geqslant 0,39 \quad \Leftrightarrow \quad 0,01 \geqslant 0,2\times0,5^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{0,01}{0,2} \geqslant 0,5^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{20} \geqslant 0,5^n$

La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{20}\right) \geqslant \ln(0,5^n) \quad \Leftrightarrow \quad -\ln(20) \geqslant n\times\ln(0,5)$

$0< 0,5< 1$ donc $\ln(0,5) < 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{-\ln(20)}{\ln(0,5)} \leqslant n$

$\frac{-\ln(20)}{\ln(0,5)} = 4,32$ à 10^{-2} près n est un entir naturel donc $n \geqslant 5$.

Conclusion

$2013+5$ **= 2018 sera la première année pour laquelle la proportion des de la commune inscrits à l'école sera supérieur à 39 %.**

4. Affirmation est fausse.

Car (c_n) est une suite croissante et $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0,4$.

Donc la proportion est au plus égal à 40 %.