

Exercice 4

5 points

Une entreprise fabrique des enceintes acoustiques sans fil. Le coût de production d'une enceinte est de 300 €. On note x le prix de vente en centaines d'euros d'une enceinte.

Une étude de marché permet de modéliser la situation : pour tout réel x de l'intervalle $[3;10]$, si le prix de vente d'une enceinte est x centaines d'euros, alors le nombre d'acheteurs est modélisé par $f(x) = e^{-0,25x+5}$.

Ainsi, $f(x)$ est une approximation du nombre d'acheteurs pour un prix de vente de x centaines euros.

Par exemple, si le prix de vente d'une enceinte est fixé à 400 euros, le nombre d'acheteurs est approché par $f(4)$.

1. Donner une valeur approximative du nombre d'acheteurs pour un prix de vente de 400 euros.
On appelle marge brute la différence entre le montant obtenu par la vente des enceintes et leur coût de production.
2. Quelle est la marge brute de cete entreprise pour un prix de vente de 400 euros par enceinte ?
On note $g(x)$ la marge brute, en centaines d'euros, réalisée par l'entreprise pour un prix de vente de x centaines d'euros par enceinte.
3. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[3;10]$,
 $g(x) = (x-3)e^{-0,25x+5}$.
4. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

factotiser(dériver[(x-3)*exp(-0.25x+5)])
$-\frac{x-7}{4}e^{-\frac{1}{4}x+5}$

- 4.a. En utilisant le résultat du logiciel de calcul formel, étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[3;10]$.
- 4.b. Pour quel prix de vente unitaire l'entreprise réalisera-t-elle la marge brute maximale ?
Donnez alors une valeur appochée de cette marge brute à l'euro près.
5. Soit G la fonction telle que $G(x) = (-4x-4)e^{-0,25x+5}$ pour tout réel x de $[3;10]$.
- 5.a. Montrer que G est une primitive de la fonction g .
- 5.b. On pose $I = \int_3^{10} g(x) dx$.
Déterminer la valeur exacte de I .

CORRECTION

1. $f(4) = e^{-0,25 \times 4 + 5} = e^4 = 54,60$ à 10^{-2} près.

Il y a 55 acheteurs pour un prix de vente de 400 euros.

2. Le coût de production d'une enceinte est 300€ donc le coût de production pour 55 enceintes est : 55×300 €. Pour un prix de vente d'une enceinte de 400 €, le prix de vente de 55 enceintes est : 55×400 €.

Pour un prix de vente d'une enceinte de 400€, la marge brute est : $55 \times 400 - 55 \times 300 = 55 \times 100 = 5\,500$ €.

3. Pour un prix de vente d'une enceinte de x centaines d'euros, le nombre d'acheteurs est : $f(x)$ donc le prix total de vente est $x \times f(x)$ et le prix total de la production est : $3x f(x)$ donc la marge brute est : $g(x) = x \times f(x) - 3 \times f(x) = (x-3) \times f(x) = (x-3)e^{-0,25x+5}$.

4.a. Le logiciel de calcul formel nous donne une forme factorisée de la dérivée de la fonction g .

On obtient pour tout nombre réel x de l'intervalle $[3;10]$: $g'(x) = -\frac{x-7}{4} e^{-0,25x+5}$.

$e^{-0,25x+5} > 0$ donc le signe de $g'(x)$ sur $[3;10]$ est le signe de $\left(-\frac{x-7}{4}\right)$ soit le signe de $(7-x)$.

$7-x \geq 0 \Leftrightarrow 7 \geq x (\geq 3)$ et $7-x < 0 \Leftrightarrow 7 < x (\leq 10)$

On donne les variations de g dans un tableau.

x	3	7	10
7-x	+	0	-
g'(x)	+	0	-
g(x)			

4.b. L'entreprise réalise la marge brute maximale pour $x = 7$ c'est à dire pour le prix de vente d'une enceinte égal à 700€.

En utilisant la calculatrice, on obtient : $g(7) = 4 e^{3,25} = 103,16$ à 10^{-2} près.

$g(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

La marge brute maximale est : 10 316€.

5.a. G est une primitive de g si et seulement si $G'(x) = g(x)$.

$(e^u)' = u' e^u$ $(e^{-0,25x+5})' = -0,25 e^{-0,25x+5}$ $(-4x-4)' = -4$.

On dérive un produit.

$G'(x) = -4 e^{-0,25x+5} + (-4x-4) \times (-0,25 e^{-0,25x+5}) = -4 e^{-0,25x+5} + (x+1) e^{-0,25x+5} = (x+1-4) e^{-0,25x+5}$

$G'(x) = (x-3) e^{-0,25x+5} = g(x)$

5.b. $I = \int_3^{10} g(x) dx = G(10) - G(3) = -44 e^{2,5} + 16 e^{4,25}$.