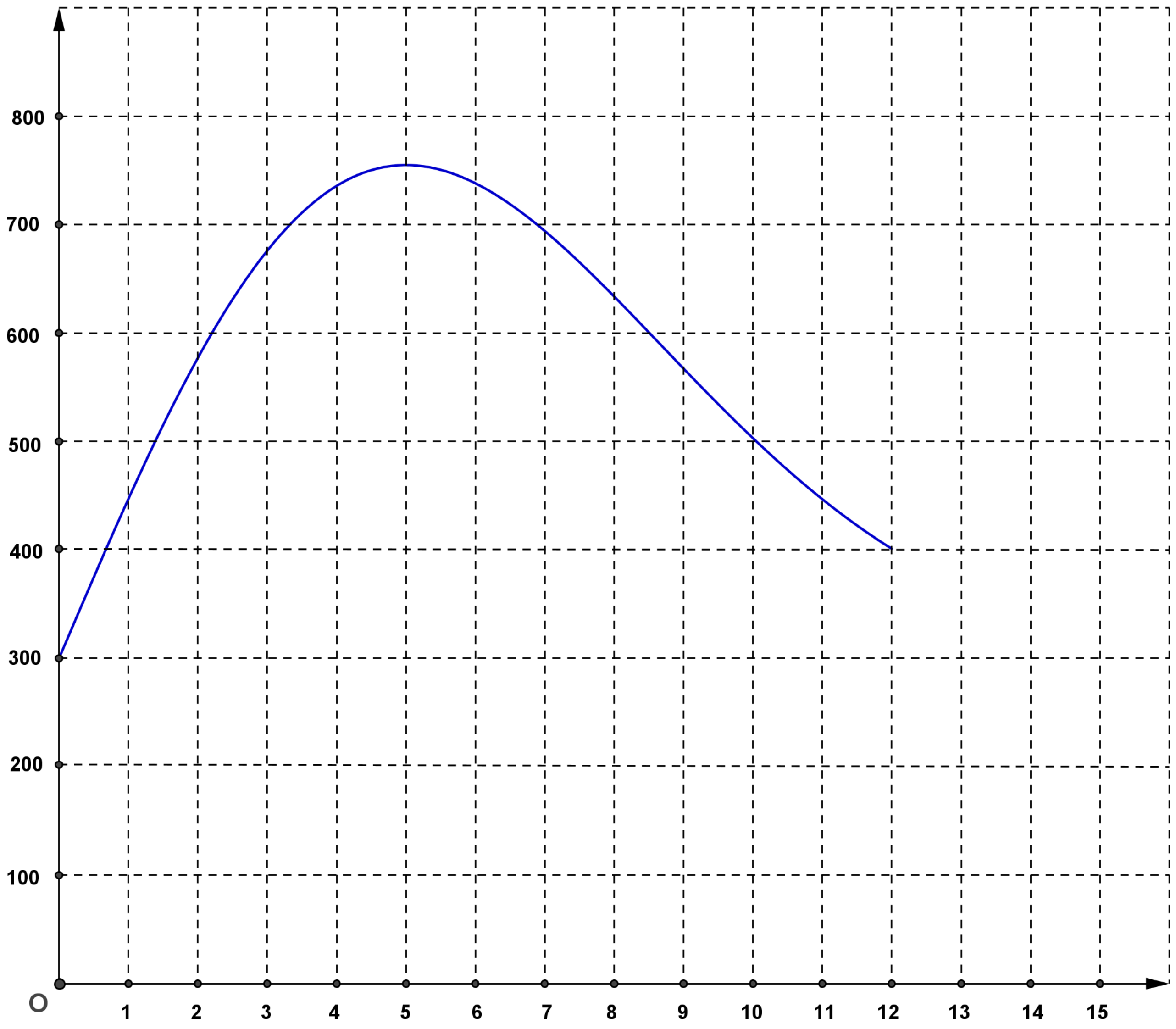
Exercice 4 — 6 points

La directrice d'une association sportive décide de proposer à ses adhérents une randonnée pédestre, longue de 12 km, sur des sentiers de montagne.
Afin que les membres de son association puissent décider de participer ou non à cette randonnée en fonction de leur niveau et de leur condition physique, elle leur condition physique , elle leur envoie le graphique ci-dessous avant de procéder aux inscriptions.
Dans un repère orthogonal, cette courbe représente la fonction f définie sur [0;12] donnant l'altitude du parcours en fonction du nombre de kilomètres effectués depuis le départ.
Ainsi x est la distance parcourue, en kilomètres, depuis le point de départ de la randonnée :
$x \in [0;12]$ et f(x) est l'altitude en mètres, à laquelle se situe le chemin de randonnée au bout de x km parcourus.



Partie A

Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. A quelle altitude se situent les randonneurs après avoir parcouru 2 kilomètres ?
2. Dans la partie descendante de cette randonnée, l'organisatrice a prévu de faire une pause avec les participants, dans un refuge situé à 600 mètres d'altitude.
3. A la fin du chemin de randonnée, les randonneurs seront-ils revenus à leur point de départ ?
   Justifier la réponse.

Partie B

Dans cette partie, les réponses devront être justifiées.
Aucune lecture graphique ne sera considérée comme une justification valable.

Une modélisation du parcours proposé permet d'affirmer que la fonction f est définie sur [0;12] par :

$$f(x)=150\,x\,e^{-0,02\,x^2}+300$$

1. On note f' la dérivée de la fonction f et on admet que :
pour tout $x\in[0;12]$, $f'(x)=(150-6x^2)e^{-0,02\,x^2}$
Déterminer le signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f sur [0;12].

2. Quelle sera, au mètre près, l'altitude maximale atteinte par les randonneurs ?
Au bout de quelle distance parcourue depuis le départ ?

3. L'un des participants de cette randonnée affirme : « Dans ce parcours, nous n'atteindront qu'une seule fois une altitude de 350 m » .
Démontrer que cette affirmation est vraie, et donner une valeur approchée, arrondie au mètre près, de la distance qu'auront parcourue les randonneurs depuis le départ pour parvenir à cette altitude.

4. Soit F la fonction définie sur [0;12] par :

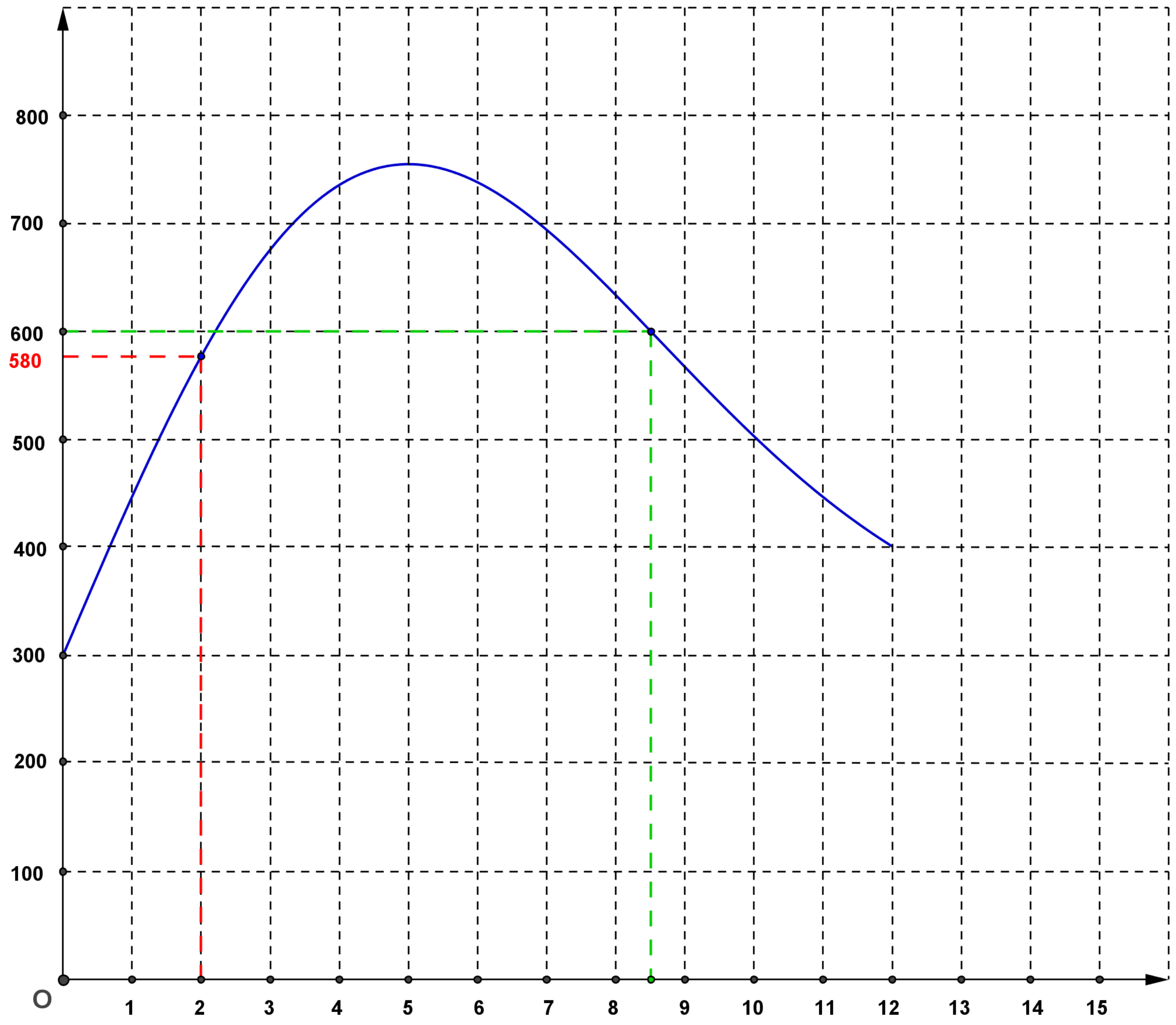
$$F(x)=300\,x-375\,e^{-0,02\,x^2}$$

Montrer que F est une primitive de f.

5. Quelle est la valeur de l'altitude moyenne de la phase d'ascension de cette randonnée.
(Déterminer la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie au mètre près).

CORRECTION

Partie A



1. Pour déterminer l'altitude situant les randonneurs après avoir parcouru 2 kilomètres, on détermine l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 2, on obtient 580.
   Après avoir parcouru 2 kilomètres, les randonneurs se situent à une altitude de 580 m.

2. Dans la partie descendante de cette randonnée, c'est à dire entre 5 et 12 kilomètres, le refuge est situé à 600m d'altitude.
   La distance (en km) parcourue par les randonneurs pour arriver au refuge est l'abscisse (supérieure à 5) du point d'ordonnée 600, on obtient 8,5.
   Les randonneurs auront parcouru 8,5 km pour arriver au refuge.

3. A la fin du chemin de randonnée, l'altitude du point d'arrivée est 400m distincte de l'altitude du point de départ 300m.
   A la fin de la randonnée, les randonneurs ne seront pas revenus au point de départ.

Partie B

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;12], $f(x)=150x\,e^{-0,02x^2}+300$.

1. On admet que pour tout x de l'intervalle [0;12], $f'(x)=(150-6x^2)e^{-0,02x^2}$.
$e^{-0,02x^2}>0$ donc le signe de $f'(x)$ sur [0;12] est le signe de $(150-6x^2)$.
$150-6x^2=6(25-x^2)=6(5+x)(5-x)$.
Pour tout x de l'intervalle [0;12], $6(5+x)>0$ donc le signe de $f'(x)$ sur [0;12] est le signe de (5-x).
Si $0\leqslant x<5$ alors $f'(x)>0$
$f'(5)=0$.
Si $5<x\leqslant 12$ alors $f'(x)<0$.
<u>Tableau de variation de f</u>

x	0		5		12
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	$f(12)$

$f(0)=300$ $f(5)=750e^{-0,5}+300=755$ à l'unité près $f(12)=150\times 12e^{-2,88}+300=401$ à l'unité près.

2. Le maximun de f est $f(5)=755$ à l'unité près.
L'altitude maximale atteinte par les randonneurs est 755m (au mètre près).
Cette altitude est atteinte au bout de 5 km.

3. f est décroisante sur [5;12] donc pour tout nombre réel [5;12], $f(5)\geqslant f(x)\geqslant f(12)$.
$f(12)=401$ à l'unité près donc $f(x)>350$, donc les randonneurs n'atteigneront pas 350m d'altitude entre les distance 5km et 12km.

- f est croissante est continue sur[0;5], $f(0)=300$ et $f(5)=755$ à l'unité près et $300<350<755$.
Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un nombre réel : a unique appartenant à [0;5] tel que $f(a)=350$.
- <u>Conséquence</u>
Les randonneurs atteindront une et une seule fois l'altitude 350m dans le parcours.
Cette altitude sera atteinte à la distance de a km.
- Pour déterminer une valeur approchée de a, on utilise la calculatrice

$f(0)=300$	$f(0,5)=374,6$	donc	$0<a<0,5$
$f(0,3)=337,6$	$f(0,4)=359,8$	donc	$0,3<a<0,4$
$f(0,33)=349,4$	$f(0,34)=350,9$	donc	$0,33<a<0,34$
$f(0,334)=349,99$	$f(0,335)350,14$	donc	$0,334<a<0,335$

$a=0,334$ à 0,001 près.
<u>Conclusion</u>
L'altitude de 350m sera attente au bout de 0,334 km (ou 334 m).

4. $(e^u)'=u'e^u$ $(e^{-0,02x^2})'=-0,02\times 2xe^{-0,02x^2}=-0,04xe^{-0,02x^2}$
Pour tou t nombre réel x de l'intervalle [0;12]
$F'(x)=300-3750\times 0,04xe^{-0,02x^2}=300-150xe^{-0,02x^2}=f(x)$
donc **F est une primitive fe f sur [0;12].**

5. La phase d'ascension s'effectue pour x appartenant à l'intervalle [0;5].
La valeur de l'altitude moyenne sur cet intervalle est :

$$m=\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\,dx=\frac{1}{5}(F(5)-F(0))=\frac{1}{5}(1500-3750e^{-0,5}+3750)=300-750e^{-0,5}+750$$

$m = 1050 - 750\,e^{-0,5}$

En utilisant la calculatrice, on obtient pour valeur approchée au mètre près de l'altitude moyenne de la phase d'ascension : 595m.

