Exercice 1 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

Affirmation 1

Pour tout réel a strictement positif, $\ln(a^3)-\ln(a^2)=\ln(a^{25})-\ln(a^{24})$

Affirmation 2

Si la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur [0;100], alors $P(X<75)=P(25>X)$.

Affirmation 3

On a prélevé un échantillon aléatoire de 400 pièces dans une production et observé 6 pièces défectueuses.
La borne supérieure de l'intervalle de confiance de la proportion des pièce défectueuses dans la production au niveau de confiance de 95 % est égale à 0,08.

Affirmation 4

L'équation $x\ln(x)=2\ln(x)$ admet exactement deux solutions : 2 et 1 sur $]0;+\infty[$.

CORRECTION

Affirmation 1 **VRAIE**

Justification

a est un réel strictement positif.

$\ln(a^3)=3\ln(a)$ $\ln(a^2)=2\ln(a)$ $\ln(a^{25})=25\ln(a)$ $\ln(a^{24})=24\ln(a)$

$\ln(a^3)-\ln(a^2)=3\ln(a)-2\ln(a)=\ln(a)$

$\ln(a^{25})-\ln(a^{24})=25\ln(a)-24\ln(a)=\ln(a)$

donc $\ln(a^3)-\ln(a^2)=\ln(a^{25})-\ln(a^{24})$

Affirmation 2 **VRAIE**

Justification

X suit la loi uniforme sur [0;100], on a :

$$P(X<75)=\frac{75-0}{100-0}=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}=0,75$$

$$P(X>25)=\frac{100-25}{100-0}=\frac{75}{100}=0,75$$

donc $P(X<75)=P(X>25)$

Affirmation 3 **FAUSSE**

Justification

La proportion de pièces défectueuses dans l'échantillon de 400 pièces est : $\frac{6}{400}=0,015$.

$n=400\geqslant 30$ $np=400\times 0,015=6\geqslant 5$ $n(1-p)=400\times 0,985=394\geqslant 5$

La borne supérieure de l'intervalle de confiance de la proportion de pièces défectueuses dans la production au niveau de confiance 95 % est égale à : $0,015+\frac{1}{\sqrt{n}}=0,015+\frac{1}{\sqrt{400}}=0,015+\frac{1}{20}=0,015+0,05=0,065$

$0,065\neq 0,08$.

Affirmation 4 **VRAIE**

Justification

$x\ln(x)=2\ln(x) \Leftrightarrow x\ln(x)-2\ln(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\ln(x)=0 \Leftrightarrow (x=2 \text{ ou } x=1)$.