Exercice 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les deux parties sont indépendantes.

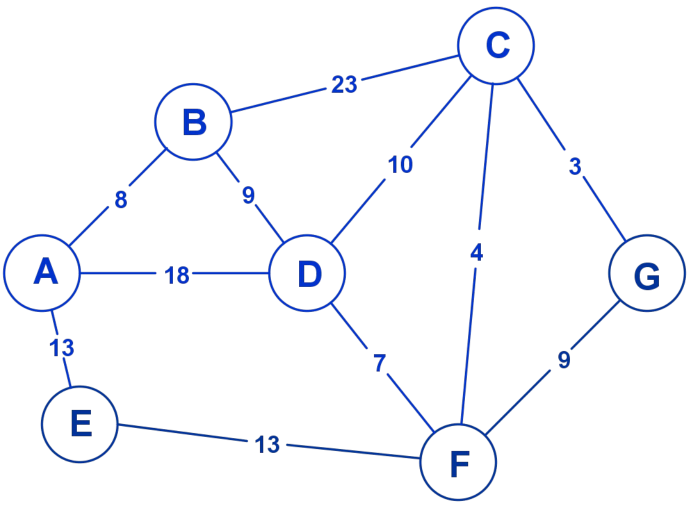
Partie A

En 2012, un village ne comptait qu'un seul médecin, Albert.
Début 2013 , un nouveau médecin, Brigitte, s'installe dans ce village.
À l'arrivée de Brigitte, 90 % des habitants choisirent Albert comme médecin, les autres choisirent Brigitte.
On suppose que chaque habitant du village est patient du même médecin,Albert ou Brigitte, tout au long d'une année.
On observe, à partir de 2013, que chaque année :
. 13 % des patients d'Albert changent de médecin et deviennent patients de Brigitte.
. 8 % des patients de Brigitte deviennent des patients d'Albert.
On choisit au hasard un habitant de ce village. Pour tout entier naturel n :
a_n est la probabilité que cet habitant soit un patient d'Albert pour l'année (2013+n).
b_n est la probabilité que cet habitant soit un patient de Brigitte pour l'année (2013+n).
$P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ est la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année (2013+n).

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
4. Montrer que $P_1=\begin{pmatrix}0{,}791 & 0{,}209\end{pmatrix}$.
5. Exprimer P_n en fonction de P_0 , M et n.
6. En déduire la matrice ligne P_4 et interpréter le résultat. Les résultats seront arrondis au millième.
7. Déterminer l'état stable $\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ de la répartition des patients des médecins Albert et Brigitte.
En donner une interprétation.

Partie B

Le médecin Albert, qui officie dans le village A, doit rendre visite à un patient d'un village voisin G.
Il a construit le graphe ci-dessous où les sommets représentent les villages alentours. Sur les arêtes sont indiquées les distances en kilomètres.



Déterminer le plus court chemin pour aller du village A au village G.

CORRECTION

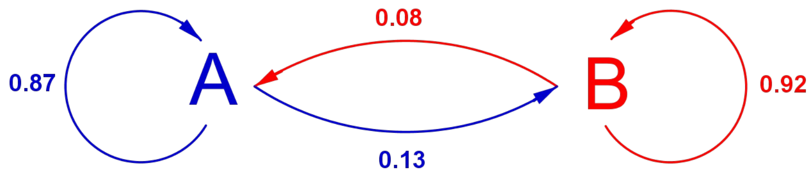
1. À l'arrivée de Brigitte 90 % des habitants du village choisirent Albert comme médecin, les autres (10%) choisirent Brigitte.
$a_0=0{,}9 \quad b_0=0{,}1 \quad P_0=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1\end{pmatrix}$

2. On choisit au hasard un habitant du village, on note :
A l'état : « l'habitant est patient d'Albert »
B l'état : « l'habitant est patient de Brigitte ».
L'arbre probabiliste a deux sommets A et B.

. Chaque année, 13 % des patients d'Albert changent de médecin et deviennent patients de Brigitte donc 87 % des patents d'Albert restent patients d'Albert.
<u>Conséquences</u>
Le poids de l'arête AA est 0,87.
Le poids de l'arête AB est 0,13.

. Chaque année, 8 % des patients de Brigitte, deviennent patients d'Albert et 92 % restent patients de Brigitte.
<u>Conséquences</u>
Le poids de l'arête BA est 0,08.
Le poids de l'arête BB est 0,92.

. On obtient l'arbre probabiliste suivant :



3. L'ordre des sommets est l'ordre alphabétique, A puis B.
Dans cet exercice on utilise les matrices lignes.
La matrice de transition M associée au graphe est $M=\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}$

m_{11} est le poids de l'arête AA : 0,87
m_{12} est le poids de l'arête AB : 0,13
m_{21} est le poids de l'arête BA : 0,08
m_{22} esl le poids de l'arête BB : 0,92
$M=\begin{pmatrix}0{,}87 & 0{,}13\\ 0{,}08 & 0{,}92\end{pmatrix}$

4. $P_1=P_0M=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}87 & 0{,}13\\ 0{,}08 & 0{,}92\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}9\times 0{,}87+0{,}1\times 0{,}08 & 0{,}9\times 0{,}13+0{,}1\times 0{,}92\end{pmatrix}$
$P_1=\begin{pmatrix}0{,}783+0{,}008 & 0{,}117+0{,}092\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}791 & 0{,}209\end{pmatrix}$

5. Pour tout entier naturel n :
$P_{n+1}=P_nM$ et $P_n=P_0M^n$

6. $P_4=P_0M^4$
En utilisant la calculatrice, on obtient :
$M^4=\begin{pmatrix}0{,}6221 & 0{,}3779\\ 0{,}2326 & 0{,}7674\end{pmatrix}$
$P_4=\begin{pmatrix}0{,}583 & 0{,}417\end{pmatrix}$ (les résultats sont arrondis au millième).
<u>Interprétation</u>

En 2013+4=2017
58,3 % des habitants du village sont patients d'Albert et 41,7 % des habitants sont patients de Brigitte.

7. $P=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ est l'état stable si et seulement si P=PM et a+b=1.

$$PM=\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,87 & 0,13 \\ 0,08 & 0,92 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,87a+0,08b & 0,13a+0,92b \end{pmatrix}$$

$$P=PM \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=0,87a+0,08b \\ b=0,13a+0,92b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0,13a-0,08b=0 \\ -0,13a+0,08b=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \{0,13a-0,08b=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \{13a-8b=0$$

$$\begin{cases} P=PM \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13a-8b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13a-8(1-a)=0 \\ b=1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21a=8 \\ b=1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{8}{21} \\ b=\dfrac{13}{21} \end{cases}$$

$P=\begin{pmatrix} \frac{8}{21} & \frac{13}{21} \end{pmatrix}$ est l'état stable

$\frac{8}{21}=38,10$ à 10^{-2} près $\qquad \frac{13}{21}=61,90$ à 10^{-2} près.

<u>Interprétation</u>
À long terme 38,1 % des habitants du village seront patients d'Albert et 61,9 % seront patients de Brigitte.

Partie B

On utilise l'algorithme de Dijkstra.

A	B	C	D	E	F	G
0(A)	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(A)	8(A)	∞	18(A)	13(A)	∞	∞
	8(A)	31(B)	17(B)	13(A)	∞	∞
		31(B)	17(B)	13(A)	26(E)	∞
		27(D)	17(B)		24(D)	∞
		27(D)			24(D)	33(F)
		27(D)				30(C)
						30(C)

Le chemin le plus court est A-B-D-C-G de longueur 30 km.