Exercice 3 6 points

Début 2013,la superficie totale des forêts sur la terre représente un peu plus de 4 milliards d'hectares.
Au cours de l'année 2013, on estime qu'environ 15 millions d'hectares ont été détruits.
Des plantations d'arbres et une expansion naturelle des forêts ont ajouté 10,2 millions d'hectares de nouvelles forêts en 2013.

1. Montrer que la superficie totale des forêts détruites au cours de l'année 2013 représente 0,375 % de la superficie totale des forêts mesurée au début de l'année.
On admet dans la suite que chaque année, la proportion des surfaces détruites de forêts et la superficie de nouvelles forêts restent constantes.
On note u_n la superficie (en millions d'hectares) occupée par les forêts sur la terre au début de l'année (2013+n) avec $u_0=4000$.

2.a. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}99625\,u_n+10{,}2$.
2.b. Montrer que la superficie totale des forêts sur la terre , au début de l'année 2014, en millions d'hectares, est $u_1=3995{,}2$.

3. Soit (d_n) la suite définie pour tout entier n par $d_n=u_n-2720$.
3.a. Montrer que pour tout entier naturel n, $d_{n+1}=0{,}99625\times d_n$.
3.b. Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Calculer d_0 .
3.c. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de d_n , en fonction de n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4.a. Proposer un algorithme affichant la superficie (en million d'hectares) occupée par les forêts sur la terre, pour chaque année de 2013 à 2029.
4.b. À partir de quelle année la superficie des forêts présentes sur la terre sera inférieure à 3,9 milliards d'hectares ? Préciser la démarche utilisée.

CORRECTION

1. On choisit pour unité le million d'hectares.
15 millions d'hectares sont détruits en 2013 sur un total de 4000 millions d'hectares, donc la proportion en pourcentage de la superficie de forêts détruites est : $\frac{15}{4000}\times 100=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$ = **0,375 %.**

2.a. Pour tout entier naturel n, u_n est la superficie, en millions d'hectares, occupées par les forêts de la terre au début de l'année (2013+n) et u_{n+1} la superficie, en millions d'hectares, occupées par les forêts de la terre au début de l'année (2013+n+1).

u_{n+1} est égal à u_n diminué de $\frac{0,375}{100}u_n$ et augmenté de 10,2 (nouvelles forêts de l'année 2013+n).

$u_{n+1}=u_n-0,00375\,u_n+10,2=(1-0,00375)u_n+10,2=0,99625\,u_n+10,2$.

2.b. 2014=2013+1 donc n=1

$u_1=0,99625\times 4000+10,2$ = **3995,2.**

3. Pour tout entier naturel n,

$d_n=u_n-2720$ donc $u_n=d_n+2720$

3.a. $d_{n+1}=u_{n+1}-2720=0,99625\,u_n+10,2-2720=0,99625(d_n+2720)-2709,8=0,99625d_n+2709,8-2709,8$

$d_{n+1}=0,99625\,d_n$.

3.b. $d_0=u_0-2720=4000-2720=1280$

(d_n) **est la suite géométrique de raison q=0,99625 et de premier terme** d_0 **= 1280.**

3.c. Pour tout entier naturel n,

$d_n=d_0q^n=1280\times 0,99625^n$ et $u_n=d_n+2720=1280\times 0,99625^n+2720$

4.a. Algorithme

Variables : k est un entier naturel
N est un entier naturel
U est un nombre relatif
Initialisation : N prend la valeur 2013
U prend la valeur 4000
Traitement : Afficher N : U
Pour k=1 à 16
N prend la valeur 2013+k
U prend la valeur 0,99625U+10,2
Afficher N : U
Fin Pour

En utilisant cet algorithme on obtient suivant (**non demandé**)

année	u_n
2013	4000
2014	3995.20
2015	3990.42
2016	3985.65
2017	3980.91
2018	3976.18
2019	3971.47
2020	3966.78
2021	3962.10
2022	3957.44
2023	3952.80
2024	3948.18
2025	3943.57
2026	3938.98
2027	3934.41
2028	3929..86
2029	3925.32

4.b. 1ère méthode

On continue le tableau précédent et on obtient : **l'année 2035.**

année	u_n
2013	4000
2014	3995.20
2015	3990.42
2016	3985.65
2017	3980.91
2018	3976.18
2019	3971.47
2020	3966.78
2021	3962.10
2022	3957.44
2023	3952.80
2024	3948.18
2025	3943.57
2026	3938.98
2027	3934.41
2028	3929..86
2029	3925.32
2030	3920.80
2031	3916.30
2032	3911.81
2033	3907.34
2034	3902.89
2035	3898.46

2ème méthode

En effectuant la résolution d'une inéquation.

$u_n < 3600 \Leftrightarrow 1280\times 0{,}99625^n + 2720 < 3900 \Leftrightarrow 1280\times 0{,}99625^n < 1180$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}99625^n < \dfrac{118}{128}$

ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}99625^n) < \ln\left(\dfrac{118}{128}\right) \quad \Leftrightarrow \quad n \times \ln(0{,}99625) < \ln\left(\dfrac{118}{128}\right)$

$0 < 0{,}99625 < 1$ donc $\ln(0{,}99625) < 0$.

$\Leftrightarrow \quad n > \ln\left(\dfrac{118}{128}\right) : \ln(0{,}99625)$

En utilisant la calculatrice, on obtient

$\ln\left(\dfrac{118}{128}\right) : \ln(0{,}99625) = 21{,}65$ à 10^{-2} près.

N est un entier naturel donc $n \geqslant 22$.

Conclusion

En 2013+22=2035 la superficie des forêts présentes sur la terre sera inférieure à 3,9 milliards d'hectares pour la première année.