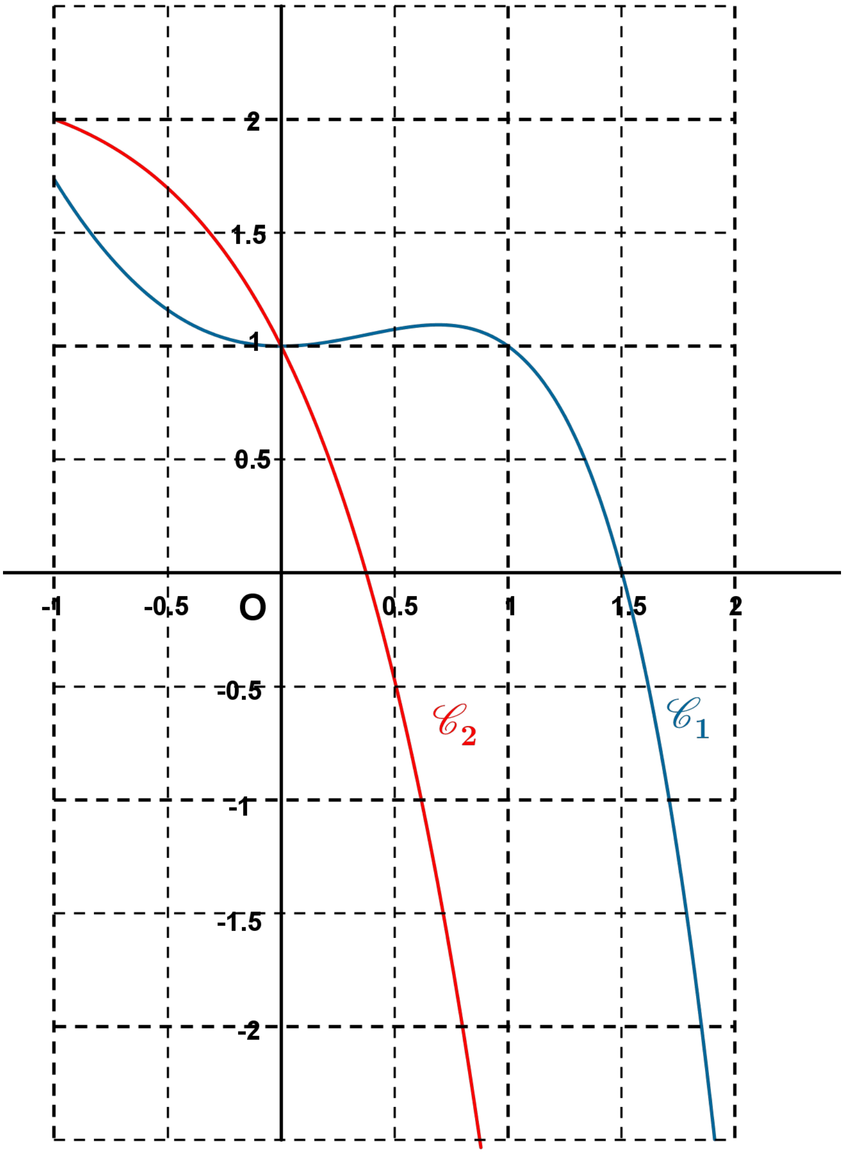
Exercice 4 — 5 points

La courbe ($\mathscr{C}_1$) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et deux fois dérivable sur [-1;2].
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.
La courbe ($\mathscr{C}_2$) ci-dessous représente, dans le repère orthonormé, la fonction f''.
Le point A(0;1) est situé sur la courbe ($\mathscr{C}_1$).
Le point B est le point d'intersection de ($\mathscr{C}_2$) avec l'axe des abscisses. Une valeur approchée de l'abscisse de B est 0,37.
La tangente à la courbe ($\mathscr{C}_1$) au point A est horizontale.



1. Par lecture graphique.
1.a. Donner la valeur de f(0).
1.b. Donner la valeur de $f'(0)$
1.c. Étudier la convexité de f sur [-1;2]. Justifier la réponse.

2. On admet désormais que la fonction f est définie pour tout réel x dans [-1;2] par :
$f(x)=(1-x)e^x+x^2$
Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	$f(x) := (1-x) * exp(x) + x^2$	$\longrightarrow (1-x)e^x + x^2$
2	$factoriser(dériver(f(x)))$	$\longrightarrow x(2-e^x)$
3	$primitive(f(x))$	$\longrightarrow \frac{1}{3}x^3 + (-x+2)e^x$

2.a. Vérifier le résultat trouvé par le logiciel pour le calcul de $f'(x)$.
2.b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur [-1;2].

3.a. Justifier que l'équation f(x) = 0 possède une unique solution α dans [-1;2].
3.b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4. Déterminer une équation de la tangente à ($\mathscr{C}_1$) au point d'abscisse 1.

5.a. Justifier la ligne 3 du tableau de calcul formel.
5.b. On admet que la fonction f est positive sur [-1;1]. En déduire l'aire exacte, en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe ($\mathscr{C}_1$), l'axe des abscisses et les droites d'équation x=-1 et x=1, puis en donner une valeur arrondie au dixième.

CORRECTION

1.a. Le point A(0;1) est situé sur ($\mathscr{C}_1$) donc f(0) = **1.**

1.b. La tangente à la courbe ($\mathscr{C}_1$) au point A est horizontale donc son coefficient directeur est égal à 0.
$f'(0)=$ **0.**

1.c. B est le point d'intersection de ($\mathscr{C}_2$) et l'axe des abscisses. 0,37 est une valeur approchée de l'abscisse du point B.
($\mathscr{C}_2$) est au dessus de l'axe des abscisses sur [-1;0,37[et ($\mathscr{C}_2$) est en dessous de l'axe des abscisses sur]0,37;2].
<u>Conséquences</u>
Si $-1 \leqslant x \leqslant 0{,}37$ alors $f''(x) \geqslant 0$ et **f est convexe sur [-1;0,37].**
Si $0{,}37 \leqslant x \leqslant 2$ alors $f''(x) \leqslant 0$ et **f est concave sur [0,37;2].**

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-1;2], on a : $f(x)=(1-x)e^x+x^2$

2.a. f est dérivable sur [-1;2]
$(1-x)'=-1 \qquad (e^x)'=e^x \qquad (x^2)'=2x$
$f'(x)=-1\times e^x+(1-x)e^x+2x=-xe^x+2x$
$f'(x)=x(2-e^x)$
Ce résultat est donné par le logiciel dans la ligne 2.

2.b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [-1;2], $f'(x)=x(2-e^x)$.
$2-e^x=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2=e^x \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln(2)$
$2-e^x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 > e^x \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2) > x$
$2-e^x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < e^x \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2) < x$
On donne le signe de $f'(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	-1		0		ln(2)		2
x		−	0	+		+	
$2-e^x$		+		+	0	−	
f '(x)		−	0	+	0	−	

Tableau de variation de f

x	-1		0		ln(2)		2
f '(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	f(-1)	↘	1	↗	f(ln(2))	↘	f(2)

$f(-1)=2\times e^{-1}+1=1{,}74$ à 10^{-2} près.
$f(0)=1$
$f(\ln(2))=(1-\ln(2))\times 2+(\ln(2))^2=1{,}09$ à 10^{-2} près
$f(2)=-e^2+4=-3{,}39$ à 10^{-2} près.

3.a. Sur l'intervalle [-1;ln(2)], le minimum de f est égal à 1 donc l'équation f(x)=0 n'admet pas de solution

sur l'intervalle [-1;ln(2)].
f est continue et strictement décroissante sur [ln(2);2], $f(\ln(2)) > 0$ et $f(2) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique α appartenant à [ln(2);2].
Conclusion
L'équation f(x)=0 admet une solution unique α appartenant à [-1;2].

3.b. Par lecture graphique on détermine que α est une valeur voisine de 1,5.
$f(1{,}5) = -0{,}5 \times e^{1{,}5} + 1{,}5^2 = 0{,}009$ à 10^{-3} près
$f(1{,}5) > 0$ donc $1{,}5 < \alpha$
$f(1{,}51) = -0{,}5 \times e^{1{,}51} = -0{,}02$ à 10^{-2} près
$f(1{,}51) < 0$ donc $\alpha < 1{,}51$
Conclusion
$1{,}50 < \alpha < 1{,}51$

4. $f(1)=1$ $f'(1)=2-e$
Une équation de la tangente à ($\mathscr{C}_1$) au point d'abscisse 1 est :
$y - f(1) = f'(1)(x-1)$ $\Leftrightarrow$ y-1=(2-e)(x-1) $\Leftrightarrow$ **y=(2-e)x-1+e**

5.a. Le logiciel précise en ligne 3 que la fonction F définie sur [-1;2] par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + (-x+2)e^x$ est une primitive de f.
Pour vérifier ce résultat il suffit de démontrer que $F'(x) = f(x)$.
$F'(x) = \frac{1}{3}(3x^2) + (-1)e^x + (-x+2)e^x = x^2 + (1-x)e^x = f(x)$.

5.b. f est continue et positive sur [-1;2] donc l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe ($\mathscr{C}_1$) l'axe des abscisses et les droites d'équation x=-1 et x=1 est :
$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(1) = \frac{1}{3} + e^1 - \left(-\frac{1}{2} + 3e^{-1}\right) = \frac{2}{3} + e - 3e^{-1}$ = **2,3** arrondie au dixième.