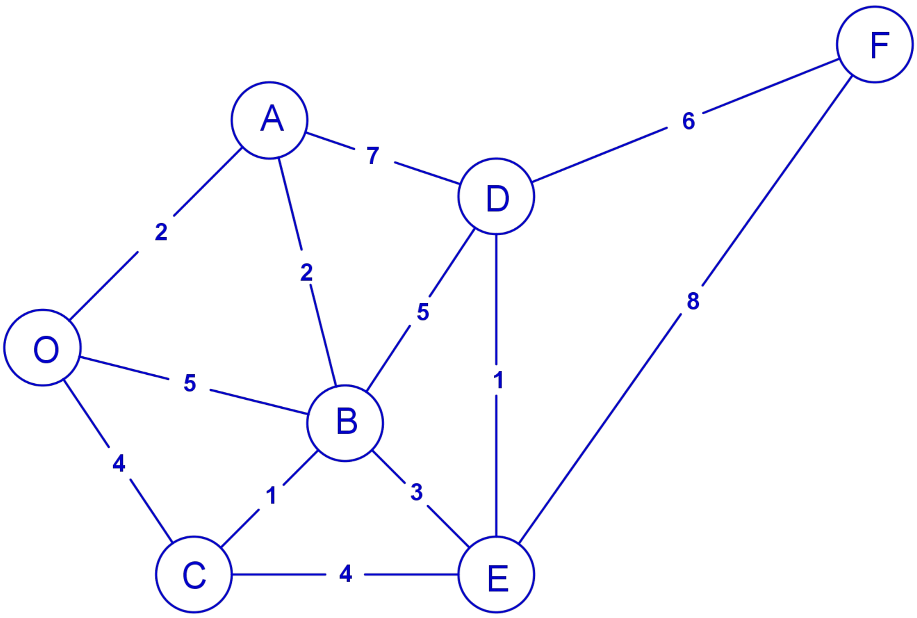
Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Alex a téiéchargé sur son smarphone un jeu lui permettant de combattre des animaux virtuels par localisation GPS. Le graphe pondéré représenté ci-dessous illustre le trajet qu'Alex doit suivre en marchant dans les rues de sa ville et le nombre d'animaux virtuels qu'il doit combattre sur la route suivie.



À l'aide d'un algorithme, déterminer le nombre minimal de créatures qu'Alex doit combattre s'il part du point O pour arriver au point F de la ville. Détailler les étapes de l'algorithme.

Partie B

Alex retrouve d'autres personnes, ayant le même jeu, dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues.
Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc. Le second jour on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc.
Soit f la fonction définie par $f(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le $x^{\text{ième}}$ jour.

1. Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.

2. Vérifier que ce système est équivalent à l'équation $AX=B$ avec :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 9 & 3 & 1\end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}8\\ 25\\ 80\end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice $M=\begin{pmatrix}0{,}5 & -1 & 0{,}5\\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix}$

3.a. Calculer $M \times A$

3.b. Que représente la matrice M pour la matrice A ?

4. Le parc de la ville a une capacité d'accueil de 2500 personnes.
Selon ce modèle le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours ?
Justifier la réponse.

CORRECTION

Partie A

On utilise l'algorithme de Dijkstra

O	A	B	C	D	E	F
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0(O)	2(O)	5(O)	4(O)	∞	∞	∞
	2(O)	4(A)	4(O)	9(A)	∞	∞
		4(A)	4(O)	9(A)	7(B)	∞
			4(O)	9(A)	7(B)	∞
				8(E)	7(B)	15(E)
				8(E)		14(D)
						14(D)

. Pour la troisième ligne, les sommets adjacents au point O sont : A, B et C.
Le coefficient de A est 2.
Le coefficient de B est 5.
Le coefficient de C est 4.
Le plus petit coefficient est 2 pour le point A.

. Pour la quatrième ligne, les sommets adjacents de A (distincts de O) sont B et D.
Le coefficient de B est $2+2=4<5$
Le coefficient de D est $2+7=9$
Le plus petit coefficient est 4 pour les sommets B et C, on choisit (arbitrairement) le sommet B.

. Pour la cinquième ligne, les sommets adjacents de B (distincts de O et A) sont C, D et E.
Le coefficient de C : $4+1=5>4$ (on conserve 4(O)).
Le coefficient de D : $4+5=9$ (on conserve 9(A)).
Le coefficient de E:$4+3=7$.
Le plus petit coefficient est 4 pour le sommet C.

. Pour le sixième ligne, le sommet adjacent à C (distinct de O et B) est E.
Le coefficient de E:$4+4=8>7$ (on conserve 7(B)).
Le plus petit coefficient est 7 pour le sommet E

. Pour la septième ligne, les sommets adjacents de E (distincts de B et C) sont D et F.
Le coefficient de D est $7+1=8<9$.
Le coefficient de F est $7+8=15$.
Le plus petit coefficient est 8 pour le sommet D.

. Pour la huitième ligne, le seul sommet adjacent de D (distinct de A,B et et E) est F.
Le coefficient de Fest $8+6=14<15$.
Le plus petit coefficient est 14 pour le sommet F.

. Pour la neuvième ligne, il ne reste que 14(D) pour le sommet F.

Conclusion
Le nombre minimal de créatures qu'Alex doit combattre est 14.
Le plus court chemin est : OABEDF

Partie B

1. L'énoncé précise que la fonction f définie par $f(x)=ax^2+bx+c$, pour tout entier naturel x compris entre 1 et 10, modélise le nombre de personnes qui se trouvent dans le parc le $x^{\text{ième}}$ jour.
Le premier jour il y a 8 personnes, le deuxième jour 25 personnes et le troisième jour 80 personnes.
On obtient :

$$\begin{cases} f(1)=8 \\ f(2)=25 \\ f(3)=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=8 \\ 4a+2b+c=25 \\ 9a+3b+c=80 \end{cases}$$

2. $AX=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b+c \\ 4a+2b+c \\ 9a+3b+c \end{pmatrix}$

$$AX=B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b+c \\ 4a+2b+c \\ 9a+3b+c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=8 \\ 4a+2b+c=25 \\ 9a+3b+c=80 \end{cases}$$

3.a. En utilisant la calculatrice on obtient :

$$MA=\begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

3.b. **La matrice M est la matrice inverse de A.**

4. $AX=B \Leftrightarrow (MA)X=MB \Leftrightarrow IX=MB \Leftrightarrow X=MB$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 \\ -40 \\ 29 \end{pmatrix}$$

donc a=19, b=-40 et c=29.
Pour tout entier naturel x compris entre 1 et 10 $f(x)=19x^2-40x+29$.
On considère la fonction f définie pour tout nombre réel de l'intervalle [1;10] et on détermine les variations de f.

$f'(x)=38x-40 \qquad f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{40}{38}=1,05$ à 10^{-2} près.

Donc f est croissante sur [2;10].
f(1)=8 et f(2)=25 le maximum de f(x) est f(10)=1529 < 2500.
<u>Conclusion</u>
Le parc ne risque pas de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours.