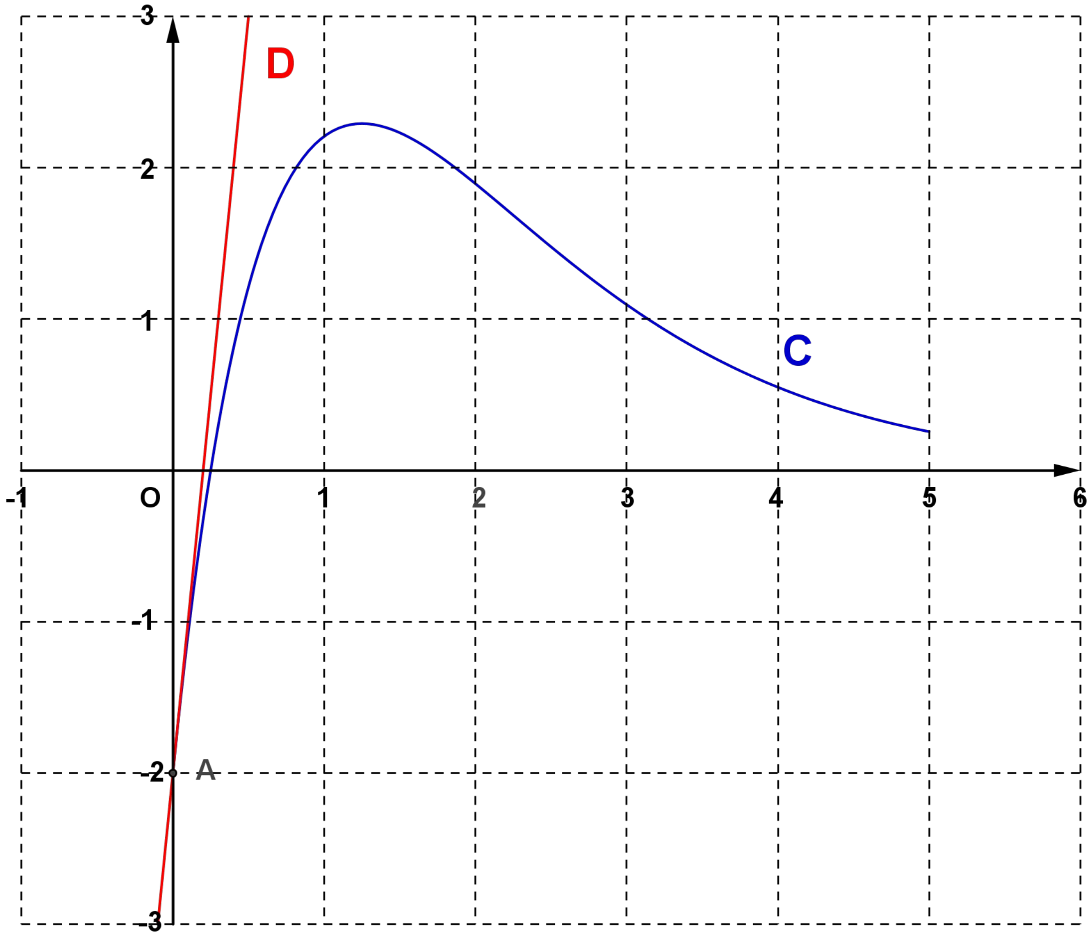
Exercice 4 *6 points*

Soit f une fonction définie sur l'intervalle [0;5] par $f(x)=(ax-2)e^{-x}$, où a est un nombre réel.
On admet dans tout l'exercice que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle [0;5].
La courbe représentative C de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.



Les courbes C et D passent toutes les deux par le point $A(0;-2)$.
La droite D est tangente à la courbe C au point A et admet pout équation : y=10x-2.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier les valeurs de f(0) et $f'(0)$.

2.a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [0;5], on a : $f'(x)=(-ax+a+2)e^{-x}$.

2.b. Déduire des questions précédentes que a=8.

2.c. Donner l'expression de $f'(x)$.

3.a. Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0;5]. On pourra faire un tableau.

3.b. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.

3.c. Résoudre sur l'intervalle [0;5] l'équation f(x)=0.

4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :

1	g(x):= (-8*x+10)*exp(-x) $\longrightarrow$ g(x):= (-8x+10) e^{-x}
2	Dériver [g(x),x] $\longrightarrow$ (8*x-18)*exp(-x)
3	Résoudre[(8*x-18)*exp(-x) > 0,x] $\longrightarrow$ x > $\frac{9}{4}$

En utilisant ces résultats :

4.a. Donner l'expression de f'' fonction dérivée seconde de f.
4.b. Justifier que la courbe C admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.

5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle [0;5], alors le bénéfice qotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par : $f(x)=(8x-2)e^{-x}$.
5.a. Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?
5.b. Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

CORRECTION

1. $f(0)=-2$ et $f'(0)=10$.

2.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;5], $f(x)=(ax-2)e^{-x}$.

$(e^{-x})'=-e^{-x}$ $(ax-2)'=a$

On dérive un produit :

$f'(x)=a\times e^{-x}+(ax-2)\times(-e^{-x})=(a-ax+2)e^{-x}=(-ax+a+2)e^{-x}$

2.b. $f'(0)=10=a+2 \Leftrightarrow$ **a =8**

2.c. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;5], $f'(x)=(-8x+10)e^{-x}$

3.a. Pour tout nombre réel x, on a $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ sur [0,5] est le signe de (-8x+10).

$-8x+10\geqslant 0 \Leftrightarrow 10\geqslant 8x \Leftrightarrow \frac{10}{8}\geqslant x \Leftrightarrow 1{,}25\geqslant x$

On donne le signe de $f'(x)$ sous la forme d'un tableau

x	0		1.25		5
f '(x)		+	0	−	

3.b. $f(0)=-2$ $f(5)=28e^{-5}=0{,}26$ **à** 10^{-2} près $f(1{,}25)=8e^{-1{,}25}=2{,}29$ à 10^{-2} près

Tableau des variations de f

x	0		1.25		5
f '(x)		+	0	−	
f(x)	-2	↗	$8e^{-1.25}$	↘	$38e^{-5}$

3.c. Pour tout nombre réel x, $e^{-x}>0$, donc :

$f(x)=0 \Leftrightarrow 8x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{8}=0{,}25$ **S={0,25}**

4.a. Pour tout nombre réel x de l'intervale [0;5}, $g(x)=f'(x)$ donc :

$f''(x)=g'(x)=(8x-18)e^{-x}$

4.b. $(8x-18)e^{-x}>0 \Leftrightarrow 8x-18>0 \Leftrightarrow x>\frac{10}{8}=2{,}25$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x<2{,}25$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow$ x=2,25

x	0		2.25		5
f ''(x)		−	0	+	

La courbe C admet un point d'inflexion au point d'abscisse 2,25.

5.a. $f(x)=(8x-2)e^{-x}$

Le bénéfice maximal est obtenu pour le maximum de f c'est à dire pour x=1,25, x est exprimé en millier de grille-pains.

Il faut fabriquer 1250 grille-pains pour avoir un bénéfice maximal.

5.b. Le maximun de la fonction f est égal à : $8e^{-1,25}$.

Le bénéfice quotidien est exprimé en centaine de milliers d'euros.

$5e^{-1,25}=2,29204$ À 10^{-5} près.

Le bénéfice quotidien maximal est 229204 € à l'euro près