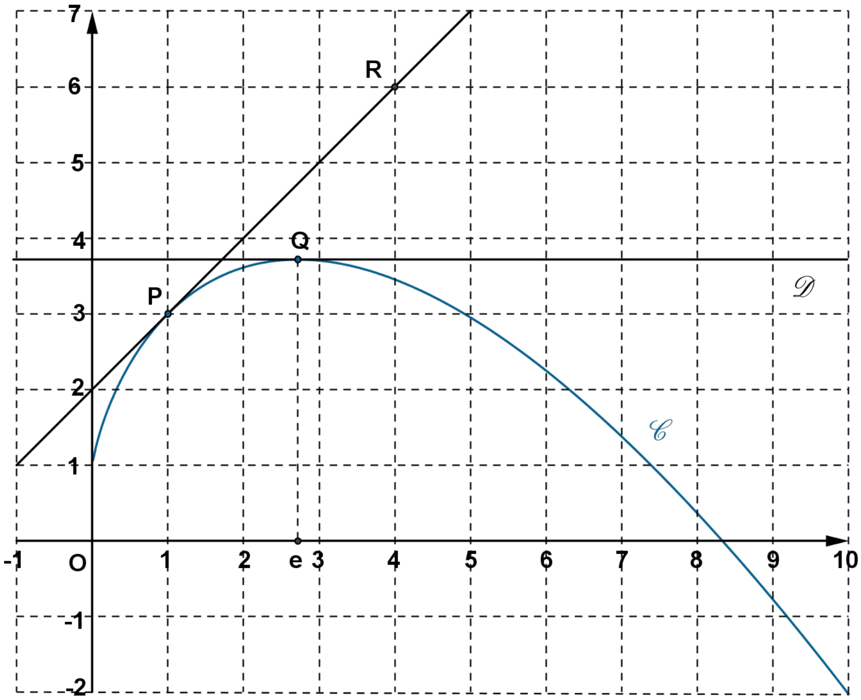
Exercice 1 5 points

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous dans un repère orthonormé d'origine O est la représentation grahique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;10]$.



On considère les points P(1;3) et R(4;6). Le point Q a pour abscisse e, avec e=2,718 à 10^{-3} près.
Les points P et Q appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$. La droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point Q.
La droite (PR) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P et la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point Q.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, les résultats seront donnés à l'aide d'une lecture graphique et sans justification.

1. Parmi les trois propositions ci-dessous, quelle est celle qui désigne l'équation de la droite (PR) ?
a. $y=2x+1$ **b.** $y=x+2$ **c.** $y=2x+2$

2. Donner les valeurs de f(1) et $f'(1)$.

3. Une seule de ces trois propositions est exacte :
a. f est convexe sur l'intervalle $]0;10]$
b. f est concave sur l'intervalle $]0;10]$
c. f n'est ni convexe ni concave sur l'intervalle $]0;10]$.
Laquelle ?

4. Encadrer l'intégrale $\int_1^2 f(x)\,dx$ par deux entiers consécutifs.

Partie B

La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle]0;10] par :
$f(x)=-x\ln(x)+2x+1$.

1.a. Calculer $f'(x)$.
1.b. Démontrer que la fonction f admet un maximum sur l'intervalle]0;10].
1.c. Calculer la valeur exacte du maximum de la fonction f sur ce même intervalle.

2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle]0;10]

3. On admet que la fonction F définie par $F(x)=-\frac{x^2}{2}\ln(x)+\frac{5}{4}x^2+x-7$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0;10].

Calculer la valeur exacte de $\int_1^2 f(x)\,dx$.

CORRECTION

1. **Réponse : b** $y = x+2$

Justifications non demandées

. Par lecture graphique on détermine l'ordonnée à l'origine de la droite (PR) : 2.
Pour aller de P vers R on va 3 unités à droite et 3 unités vers le haut donc le coefficient directeur de la droite (PR) est égal à : $\frac{3}{3}=1$.

Conclusion
On obtient pour équation pour la droite (PR) : y = x+2.

. On peut aussi vérifier par le calcul en utilisant les coordonnées des points :
P(1;3) R(4;6)

a. $3=2\times1+1$ $6\neq2\times4+1$

b. $3=1+2$ $6=4+2$

c. $3\neq2\times1+2$ $6\neq2\times4+2$

2. $f(1)=3$ $f'(x)=1$

justifications non demandées

$f(1)$ est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 donc l'ordonnée du point P : 3.
$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 c'est à dire le coefficient directeur de la droite (PR).

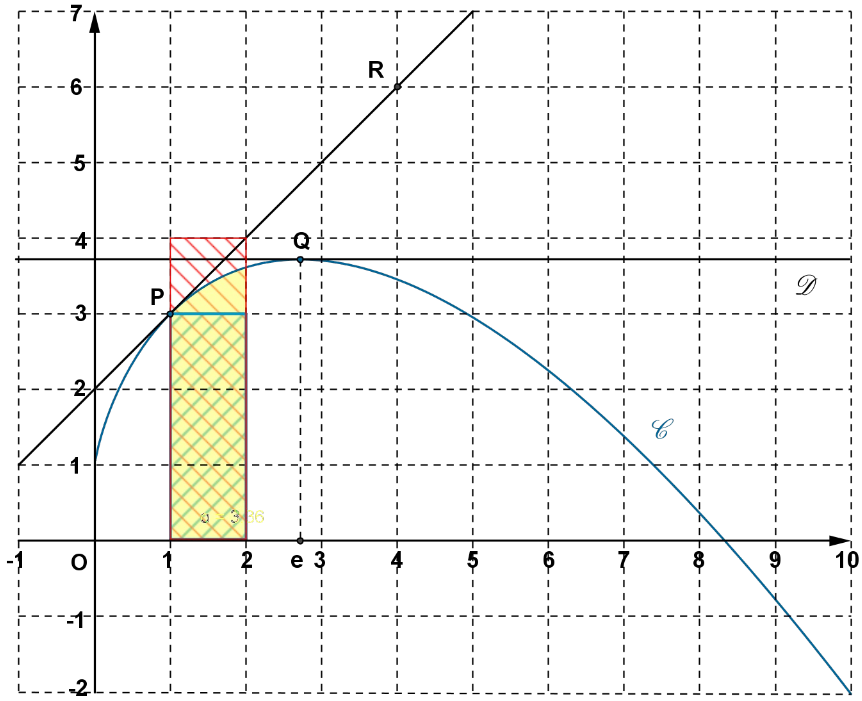
3. **Réponse : b** **f est concave sur]0;10]**

Justification non demandée

On remarque : $\mathscr{C}$ est endessous de toutes ses tangentes sur l'intervalle]0;10].

4. $3 < \int_1^2 f(x)\,dx < 4$

Justifications non demandées



Le repère est orthonormé

f est continue et positive sur [1;2] donc $\int_1^2 f(x)\,dx$ est l'aire (en unité d'aire) de la partie de plan comprise

entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations x=1 et x=2 (partie colorée en jaune sur la figure.
Cette partie contient un rectangle d'aire 3 (hachuré en bleu) et cette partie est contenue dans un rectangle d'aire 4 (hachuré en rouge).

Partie B

Pour tout nombre réel x de l'intervalle]0;10] : $f(x)=-x\ln(x)+2x+1$

1.a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $(\ln(x))'=\frac{1}{x}$

f est dérivable sur]0;10]

$f'(x)=-1\times\ln(x)-x\times\frac{1}{x}+2=-\ln(x)-1+2$ = **1-ln(x)**

1.b. $f'(x)\geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-\ln(x)\geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geqslant \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^1\geqslant x>0 \quad \Leftrightarrow \quad e>x>0$

$f'(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad e<x\leqslant 10$

On indique les variations de f dans un tableau (mais on ne calcule pas la limite de f en 0).

x	0		e		10
f'(x)	‖	+	0	−	
f(x)	‖	↗		↘	

donc f admet un maximum pour x = e.

1.c. $f(e)=-e\ \ln(e)+2e+1=-e\times 1+2e+1$ = **e + 1.**

2. $f'(x)=1-\ln(x)$

f' est dérivable sur]0;10]

$f''(x)=-\frac{1}{x} < 0$ donc f est concave sur]0;10] et $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle]0;10].

3. On admet que F définie par $F(x)=-\frac{x^2}{2}\ln(x)+\frac{5}{4}x^2+x-7$ est une primitive de f sur]0;10].

$\int_1^2 f(x)\,dx = F(2)-F(1)$

$F(2)=-\frac{4}{2}\ln(2)+\frac{5}{4}\times 2^2+2-7=-2\ln 2+5+2-7=-2\ln 2$

$F(1)=-\frac{1^2}{2}\ln(1)+\frac{5}{4}\times 1^2+1-7=\frac{5}{4}-6=-\frac{19}{4}$

$\int_1^2 f(x)\,dx = -2\ln(2)+\frac{19}{4}=\frac{19}{4}-2\ln(2)$ (3,36 à 10^{-2} près).