Exercice 2 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [1;10] par : $f(x)=4e^{-0,5x+1}+x-1$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle [1;10] et on note f' sa fonction dérivée.
On donne en annexe, à remettre avec la copie, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle [1;10] dans un repère d'origine O.

Partie A

1. Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;10], on a $f'(x)=-2e^{-0,5x+1}+1$.

2.a. Montrer que sur l'intervalle [1;10], l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution le nombre $\alpha=2+2\ln 2$.
2.b. Placer sur le graphique fourni en annexe le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse α.

3. On admet que l'ensemble des solutions sur l'intervalle [1;10] de l'inéquation $f'(x)\geqslant 0$ est [2+2ln2;10].
En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle [1;10].

Partie B

L'entreprise « COQUE EN STOCK » fabrique et commercialise des coques pour téléphone portable.
Son usine est en mesure de produire entre 100 et 1 000 coques par jour.
La fonction f permet de modéliser le coût de production d'une coque en fonction du nombre de centaines de coques produites par jour. Ainsi si x désigne le nombre de centaines de coques produites alors f(x) représente le coût, en euros, de production d'une coque.

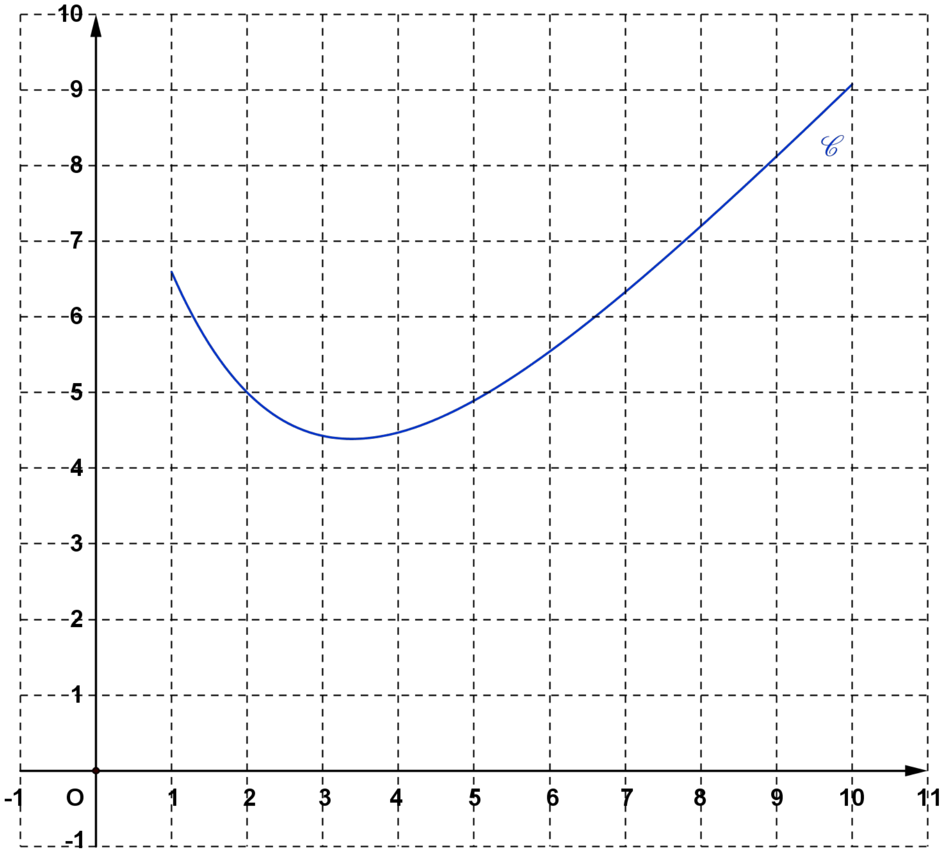
1. Calculer , au centime près, le coût de production d'une coque dans le cas de la fabrication de 500 coques par jour.

2.a. Montrer que produire 339 coques par jour permet de minimiser le coût unitaire le production.
2.b. En déduire le coût minimal de production d'une coque, en euros, au centime près.

Partie C

Le prix de vente d'une coque peut être modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle [1;10] par :
$g(x)=-\frac{1}{4}x+6$ où x désigne le nombre de cntaines de coques produites et g(x) le prix de vente d'une coque en euros.
Estimer les quantités de coques à produire par jour afin d'assurer un bénéfice à l'entreprise.

ANNEXE
À remettre avec la copie



CORRECTION

Partie A

Pour tout x de lintervalle [1;10] $f(x)=4e^{-0,5x+1}+x-1$

1. $(e^u)'=u'e^u$ $(e^{-0,5x+1})'=-0,5e^{-0,5x+1}$

f est dérivable sur $[1;10]$.

$f'(x)=4\times(-0,5e^{-0,5x+1})+1=-2e^{-0,5x+1}+1$.

2.a. $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2e^{-0,5x+1}+1=0 \Leftrightarrow 1=2e^{-0,5x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=e^{-0,5x+1} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)=-0,5x+1$

$\Leftrightarrow -\ln(2)=-0,5x+1 \Leftrightarrow 0,5x=1+\ln(2) \Leftrightarrow x=2+2\ln(2)$.

Conclusion

L'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution α = 2+2ln(2).

2.b. On place le point d'abscisse α sur l'axe des abscisses (une valeur approchée de α, à 10^{-2} près, est 3,39)

3. On admet que l'ensemble des solutions sur l'intervalle [1;10] de l'inéquation $f'(x)\geqslant 0$ est : [2+ln(2);10].

Donc l'ensemble des solutions sur l'intervalle [1;10] de l'inéquation $f'(x)<0$ est : [1;2+2ln(2)[.

On donne les variations de la fonction f sous la forme d'un tableau.

x	1		α		10
f'(x)		–	0	+	
f(x)		↘		↗	

Conséquence

$f(\alpha)$ est le minimum de la fonction f sur [1;10].

On place sur la figure le point $M(\alpha;f(\alpha))$.

Partie B

1. 500 est égal à 5 centaines donc le coût de la production d'une coque dans le cas de la fabrication de 500 coques par jour est f(5).

$f(5)=4e^{-1,5}+5-1$.

En utilisant la calculatrice, on obtient : f(5) = 4,89 à 10^{-2} près.

Conclusion

Le coût de la production d'une coque dans le cas de la fabrication de 500 coques par jour est : 4,89€.

2.a. Nous avons vu dans la partie A que f admet un minimum pour α.

Une valeur approchée de α à 10^{-2} près est : 3,39.

Il faut donc produire 3,39 centaines de coques (soit 339 coques) pour avoir le coût unitaire minimal de la production.

2.b. Ce coût minimal est égal à $f(\alpha)$.

On a $f'(\alpha)=0$ et $-2e^{-0,5\alpha+1}+1=0$ donc $e^{-0,5\alpha+1}=\frac{1}{2}$.

$f(\alpha)=4e^{-0,5\alpha+1}+\alpha-1=4\times\frac{1}{2}+2+2\ln(2)-1=3+2\ln(2)$ = 4,39 à 10^{-2} près.

Conclusion

Le coût minimal de production d'une coque est : 4,39€.

Partie C

Le prix de vente d'une coque peut être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle [1;10] par :
$g(x)=-\frac{1}{4}x+6$ où x désigne le nombre de centaines de coques produites et g(x) le prix de vente en euros.
L'entreprise réalise un bénéfice si et seulement si $g(x)-f(x)\geqslant 0$.
$g(x)-f(x)=-\frac{1}{4}x+6-4e^{¿0,5x+1}-x+1=7-\frac{5}{4}x-4e^{-0,5x+1}$.
On ne peut pas, par le calcul, résoudre l'inéquation $g(x)-f(x)\geqslant 0$.
Dans l'énoncé, on nous demande d'estimer et non de calculer, pour cela on propose une résolution graphique.
La courbe représentative de la fonction g sur [1;10] est un segment de droite Δ d'équation : $y=-\frac{1}{4}x+6$.
On étudie la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ .
Les deux courbes ont deux points d'intersection I et J.
Par lecture graphique, l'abscisse de I est : $x_I=1,5$ et l'abscisse de J est : $x_J=4,8$
$g(x)-f(x)\geqslant 0$ pout tout x de l'intervalle [1;10] tel que le point de Δ d'abscisse x est au dessus du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x.
<u>Conséquence</u>
L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x)-f(x)\geqslant 0$ est : $[x_I;x_J]$.
<u>Conclusion</u>
L'entreprise doit fabriquer entre 150 et 480 coques par jour pour réaliser un bénéfice.

ANNEXE
à rendre avec la copie