

Exercice 3 *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité* 5 points

On considère la suite géométrique (u_n) de raison 0,9 et de premier terme $u_0 = 50$.

1.a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il calcule et affiche le 25^{ème} terme de cette suite c'est à dire u_{24} :

Variables : N est un entier naturel
U est un nombre réel

Initialisation : U prend la valeur

Traitement : Pour N allant de 1 à 24
U prend la valeur
Fin Pour

Sortie : Afficher U

1.b. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

1.c. Calculer u_{24} et donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0,01$.

3. On souhaite calculer la somme $S_{24} = u_0 + u_1 + \dots + u_{24}$.

Voici trois propositions d'algorithmes :

Algorithme 1

Variables : N est un entier naturel
S est un nombre réel

Initialisation : S prend la valeur 0

Traitement : Pour N allant de 0 à 24
S prend la valeur $S + 50 \times 0,9^N$
Fin Pour

Sortie : Afficher S

Algorithme 2

Variables : N est un entier naturel
S est un nombre réel

Initialisation : S prend la valeur 0

Traitement : Pour N allant de 0 à 24
S prend la valeur $50 \times 0,9^N$
Fin Pour

Sortie : Afficher S

Algorithme 3

Variables : N est un entier naturel
S est un nombre réel

Initialisation : S prend la valeur 50

Traitement : Pour N allant de 0 à 24
S prend la valeur $S + 50 \times 0,9^N$
Fin Pour

Sortie : Afficher S

- 3.a.** Un seul de ces algorithmes permet de calculer la somme S_{24} et de l'afficher.
Préciser lequel en justifiant la réponse.
- 3.b** Calculer la somme S_{24} .
On donnera une valeur approchée du résultat à l'unité près.
- 4.** Pour tout entier naturel n , on note : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
On admet que la suite (S_n) est croissante et que pour tout entier naturel n :
 $S_n = 500 - 450 \times 0,9^n$.
- 4.a.** Déterminer la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
- 4.b.** Alex affirme que S_n peut dépasser 500 pour une valeur de l'entier n suffisamment grande.
Que pensez-vous de son affirmation ? Justifier la réponse.

CORRECTION

1.a. On complète l'algorithme proposé.

Variables : N est un nombre entier
 U est un nombre réel
Initialisation : U prend la valeur **50**
Taitement : Pour N allant de 1 à 24
 U prend la valeur **0,9xU**
 Fin Pour
Sortie : Afficher U

1.b. Pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n = 20 \times 0,9^n$$

1.c. En utilisant la calculatrice :

$$u_{24} = 50 \times 0,9^{24} = \mathbf{3,988 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

$$2. \quad u_n < 0,01 \Leftrightarrow 50 \times 0,9^n < 0,01 \Leftrightarrow 0,9^n < \frac{0,01}{50} = 0,0002$$

ln est une fonction strictement croissante sur $]0; +\infty[$
 $\Leftrightarrow \ln(0,9^n) < \ln(0,0002) \Leftrightarrow n \times \ln(0,9) < \ln(0,0002)$
 $0 < 0,9 < 1$ donc $\ln(0,9) < 0$
 $\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,0002)}{\ln(0,9)}$

En utilisant la calculatrice :
 $\frac{\ln(0,0002)}{\ln(0,9)} = 80,84 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$

n est un entier naturel
 donc $u_n < 0,01 \Leftrightarrow n \geq 81$

Conclusion

Le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0,01$ est 81.

3.a. Pour l'algorithme 2 en sortie on obtient : $S = 50 \times 0,9^{24} = u_{24}$ et non S_{24} .

Pour l'algorithme 3, pour la 1^{ère} boucle pour N=0 on obtient $S = 50 + 50 \times e^0 = 100$ or on doit obtenir $S = u_0 = 50$.

Conclusion

L'algorithme qui permet de calculer la somme S_{24} et l'afficher est : l'algorithme 1.

$$3.b. \quad S_{24} = u_0 + u_1 + \dots + u_{24} = \frac{u_0 - u_{25}}{1 - q} = \frac{50 - 50 \times 0,9^{25}}{1 - 0,9} = 500 - 500 \times 0,9^{25}.$$

En utilisant la calculatrice :
 $S_{24} = 464,1 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}$
 $S_{24} = \mathbf{464 \text{ à l'unité près.}}$

4. Pour tout entier n, $S_n = 500 - 450 \times 0,9^n$.

$$4.a. \quad 0 < 0,9 < 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0.$$

4.b. Affizimation fausse

La suite (S_n) es une suite croissante convergente vers 500, donc pour tout entiernaturel n $S_n \leq 500$.
 S_n **ne pourra pas dépasser 500.**