Exercice 4 5 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Une entreprise spécialisée dans la personnalisation des étuis de smarphones fait ses achats chez deux fournisseurs :
. un fournisseur A qui lui garantt 99 % d'étuis non défectueux ;
. un fournisseur B qui lui garantit 94 % d'étuis non défectueux.
On sait également que 60 % des étuis achetés par l'entreprise proviennent du fournisseur A (le reste provenant du fournisseur B).
On choisit au hasard un étui de smarphone et on considère les événements suivants :
. A : « l'étui provient du fournisseur A » ;
. B : « l'étui provient du fournisseur B » ;
. D : « l'étui est défectueux ».

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

2. Calculer la probabilité qu'un étui soit défectueux.

3. On choisit un étui au hasard et on constate qu'il est défectueux.
Montrer que la probabilité qu'il provienne du fournisseur B est égale à 0,6.

Partie B

On rappelle que le fournisseur B garantit 94 % d'étuis non défectueux.
Un employé de l'entreprise prélève un échantillon de 400 étuis qui proviennent du fournisseur B.
Il constate que 350 de ces étuis ne sont pas défectueux.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des étuis défectueux dans un échantillon aléatoire de 400 étuis provenant du fournisseur B.
On donnera des valeurs approchées au millième des bornes de cet intervalle.

2. Faut-il informer le fournisseur B d'un problème ?

Partie C

Un étui est considéré comme conforme sison épaisseur est comprise entre 19,8 mm et 20,2 mm.
Le fournisseur B souhaite qu'au moins 95 % des étuis produits soient conformes. Pout cela il veut vérifier les réglages des machines de production.
On choisit un étui au hasard dans la production du fournisseur B.
On note X la variable aléatoire associée à l'épaisseur (en mm) de l'étui. On admet que X suit une loi normale d'espérance 20 mm.

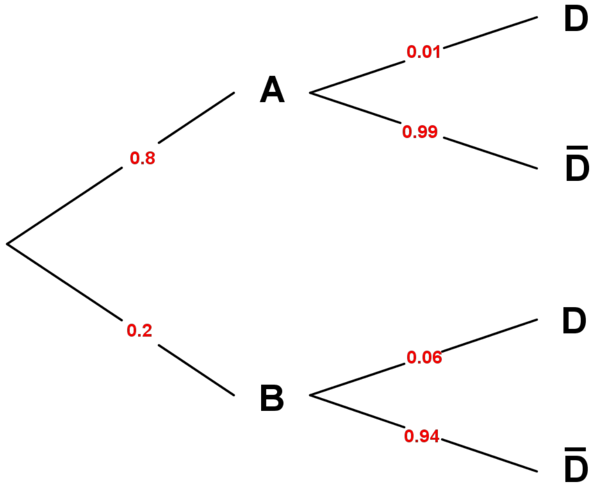
1. En observant les réglages des machines de production, le fournisseur B constate que l'écart-type de X est égal à 0,2.
Justifier qu'il faut revoir les réglages des machines.

2. Déterminer une valeur de l'écart-type de X pour laquelle la probabilité qu'un étui soit conforme est environ égale 0,95.

CORRECTION

1. L'énoncé précise :

- 80 % des étuis achetés par l'entreprise parviennent du fournisseur A (le reste du fournisseur B).
  Donc $P(A)=0{,}8$ et $P(\bar{A})=P(B)=1-0{,}8=0{,}2$.
- Le fournisseur A garantit 99 % d'étuis non défectueux.
  Donc $P_A(\bar{D})=0{,}99$ et $P_A(D)=1-P_A(\bar{D})=1-0{,}99=0{,}01$.
- Le fournisseur B garantit 94 % d'étuis non défectueux.
  Donc $P_B(\bar{D})=0{,}94$ et $P_B(D)=1-P_B(\bar{D})=1-0{,}94=0{,}06$.
- On obtient d'arbre pondéré suivant :



2. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilistes totales.

$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)=P(A)\times P_A(D)+P(B)\times P_B(D)=0{,}8\times 0{,}01+0{,}2\times 0{,}06=0{,}008+0{,}012$

P(D) = 0,02.

3. On nous demande de calculer $P_D(B)$.

$P_D(B)=\dfrac{P(B\cap D)}{P(D)}=\dfrac{0{,}012}{0{,}02}=\dfrac{12}{20}$ = **0,6.**

Partie B

1. On veut déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des étuis défectueux dans un échantillon de 400 étuis.

La probabilité p qu'un étui acheté au fournisseur B soit défectueux est $p = 0{,}06$.

$n=400 \geqslant 30$ $\quad np=400\times 0{,}06=24 \geqslant 5$ $\quad n(1-p)=400\times 0{,}94=376 \geqslant 5$.

On obtient pour intervalle de fluctuation de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %:

$$I=\left[p-1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)]}{n}};p+1{,}96\times\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]=\left[0{,}06-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}06\times 0{,}94}{400}};0{,}06+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}06\times 0{,}94}{400}}\right]$$

$1{,}96\times\sqrt{\dfrac{0{,}06\times 0{,}94}{400}}=0{,}023$ à 10^{-3} près.

I = [0,037;0,083].

2. La proportion d'étuis défectueux dans l'échantillon de 400 est :

$\dfrac{400-350}{400}=\dfrac{50}{400}=0{,}125$.

0,125 n'appartient pas à l'intervalle I.

<u>Conséquence</u>

Il faut donc informer le fournisseur B d'un problème avec un risque d'erreur de 5 %.

Partie C

1. X suit la loi normale d'espérance $\mu=20$ et d'écart-type $\sigma=0{,}2$.
En utilisant la calculatrice, on obtient :
$P(19{,}8\leqslant X\leqslant 20{,}2)=0{,}66<0{,}95$
<u>Conséquence</u>
Il faut donc revoir le réglage des machines.

2. Si Y une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors :
$P(\mu-2\sigma\leqslant Y\leqslant \mu+2\sigma)=0{,}95$.
X est une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance 20 et on veut que :
$P(20-0{,}2\leqslant X\leqslant 20+0{,}2)=P(20-2\times 0{,}1\,;20+2\times 0{,}1)=0{,}95$.
<u>Conséquence</u>
Il sutfit de choisir σ = 0,1.