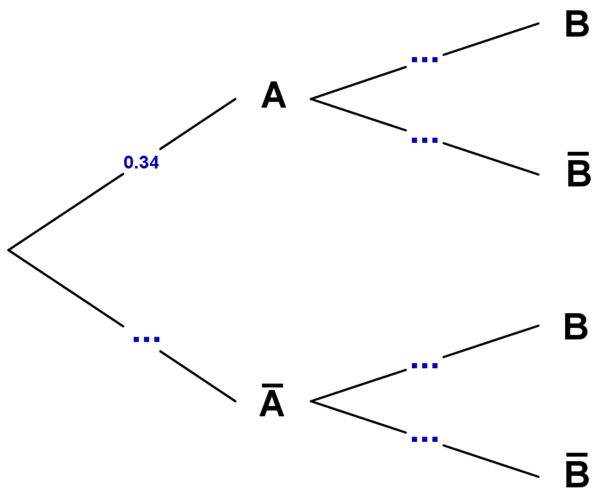
Exercice 2 5 points

Le marathon est une épreuve sportive de course à pied.
Dans cet exercice, tous les résultats approchés seront donnés à 10^{-3} près.
Les deux parties de cet exerice sont indépendantes.

Partie A

Une étude portant sur le marathon de Tartonville montre que :
. 34 % des coureurs terminent en moins de 234 minutes ;
. parmi les coureurs qui terminent la course en moins de 234 minutes, 5 % ont plus de 60 ans ;
. parmi les coureurs qui terminent la course en plus de 234 minutes, 84 % ont moins de 60 ans.
On sélectionne au hasard un coureur et on considère les événements suivants
. A : « le coureur a terminé le marathon en moins de 234 minutes » ;
. B : « le coureur a moins de 60 ans ».
On rappelle que si E et F sont deux événements, la probabilité de l'événement E est notée P(E) et celle de F sachant E est notée $P_E(F)$ de plus $\bar{E}$ désigne l'événement contraire de E.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous associé à la situation de l'exercice :



2.a. Calculer la probabilité que la personne choisie ait terminé le marathon en moins de 234 minutes et soit âgée de plus de 60 ans.
2.b. Vérifier que $P(\bar{B})=0,123$.
2.c. Calculer $P_{\bar{B}}(A)$ et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

Partie B

On suppose que le temps en minutes mis par un marathonien pour finir le marathon de Tartonville est modélisé pat une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu=250$ et d'écart-type $\sigma=39$.

1. Calculer $P(210\leqslant T\leqslant 270)$.
2. Un coureur est choisi au hasard parmi les coureurs qui ont mis entre 210 minutes et 270 minutes pour finir le marathon.
Calculer la probabilité que ce coureur ait terminer la course en moins de 240 minutes.
3.a. Calculer $P(T\leqslant 300)$.
3.b. Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel t, arrondi à l'unité, vérifiant : $P(T\geqslant t)=0,9$.
3.c. Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

CORRECTION

Partie A

1. 34 % des coureurs terminent la course en moins de de 334 minutes donc $P(A)=0{,}34$.

Conséquence

$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0{,}34 = \mathbf{0{,}66}$

. Parmi les coureurs qui terminent la course en moins de 234 minutes, 5 % ont plus de 60 ans donc $P_A(\bar{B})=0{,}05$

Conséquence

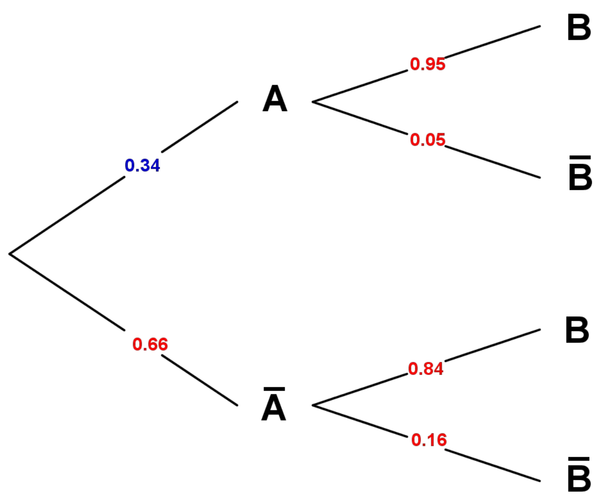
$P_A(B)=1-P_A(\bar{B})=1-0{,}05 = \mathbf{0{,}95}$

. Parmi les coureurs qui terminent la course en plus de 234 minutes, 84 % ont moins de 60 ans donc $P_{\bar{A}}(B)=0{,}84$

Conséquence

$P_{\bar{A}}(\bar{B})=1-P_{\bar{A}}(B)=1-0{,}84 = \mathbf{0{,}16}$

. On obtient l'arbre de probabilité



2.a. On nous demande de calculer $P(A\cap\bar{B})$

$P(A\cap\bar{B})=P(A)\times P_A(\bar{B})=0{,}34\times0{,}05 = \mathbf{0{,}017}$

2.b. En utilisant l'arbre de probabilité ou la formule des probabilités totales

$P(\bar{B})=P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap\bar{B})$

$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(\bar{B})=0{,}66\times0{,}16=0{,}106$ à 10^{-3} près

$P(\bar{B})=0{,}017+0{,}106 = \mathbf{0{,}123}$ à 10^{-3} près.

2.c. $P_{\bar{B}}(A)=\dfrac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{0{,}017}{0{,}123}=\dfrac{17}{123} = \mathbf{0{,}138}$ à 10^{-3} près

Interprétation

Parmi les coureurs de plus de 60 ans, 13,80 % terminent le marathon en moins de 234 minutes.

Partie B

1. En utilisant la calculatrice on obtient : $P(210\leqslant T\leqslant 270) = \mathbf{0{,}543}$ à 10^{-3} près.

2. On nous demande de calculer : $P_{(210\leqslant T\leqslant 270)}(T\leqslant 240)$

$$P_{(210\leqslant T\leqslant 270)}(T\leqslant 240)=\frac{P((210\leqslant T\leqslant 270)\cap(T\leqslant 240))}{P(210\leqslant T\leqslant 270)}=\frac{P(210\leqslant T\leqslant 240)}{P(210\leqslant T\leqslant 270)}$$

En utilisant la calculatrice, on obtient $P(210\leqslant T\leqslant 240)=0{,}246$ à 10^{-3} près.

$P_{(210\leqslant T\leqslant 270)}(T\leqslant 240)=\dfrac{0{,}246}{0{,}543}=\dfrac{246}{2543}=$ **0,453** à 10^{-3} près.

3.a. En utilisant la calculatrice, on obtient $P(T\leqslant 300)=$ **0,900** à 10^{-3} près.

3.b. On demande de déterminer une valeur approchée à l'unité près de t vérifiant $P(T\geqslant t)=0{,}9$.

En utilisant la calculatrice, on obtient **t=200** et $P(T\geqslant 200)=0{,}9$.

Remarque

Si T est une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance μ et si a est un nombre réel positif alors $P(T\leqslant \mu+a)=P(\mu-a\leqslant T)$

$300=250+50$ et $P(T\leqslant 300)=P(T\leqslant 250+50)=0{,}9$ donc $P(250-50\leqslant T)=P(200\leqslant T)=0{,}9$.

3.c. **90 % des coureurs terminent le marathon en plus de 300 minutes (2heures 20minutes).**