Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Soit (u_n) définie par : $u_0=150$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}8\,u_n+45$.

1. Calculer u_1 et u_2 -

2. Voici deux propositions algorithmes :

Algorithme 1

Variables :	N est un entier naturel U est un nombre réel
Initialisation :	U prend la valeur 150 N prend la valeur 0

Traitement :	Tant que $U\geqslant 220$
	  U prend la valeur $0{,}8\times U+45$
	  N prend la valeur $N+1$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher N

Algorithme 2

Variables :	N est un entier naturel U est un nombre réel
Initiation :	U prend la valeur 150 N prend la valeur 0

Traitement :	Tant que $U<220$
	  U prend la valeur $0{,}8\times U+45$
	  N prend la valeur $N+1$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher N

2.a. Un seul de ces algorithme permet de calculer puis d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $u_n\geqslant 220$.
2.b. Quelle est la valeur numérique affichée par l'algorithme choisi à la question précédente ?

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n=u_n-225$.
3.a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
3.b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n=225-75\times 0{,}8^n$.

4. Une petite ville de province organise chaque année une course à pied dans les rues de son centre.
En 2015, le nombre de participants à cette course était de 150.
On fait l'hypothèse que d'une année sur l'autre
. 20 % des participants ne reviennent pas l'année suivante ;
. 45 nouveaux participants s'inscrivent à la course.
La petite taille des ruelles du centre historique de la ville oblige les organisateurs à limiter le nombre des participants à 250.
Vont-ils devoir refuser des inscriptions dans les années à venir ? Justifier la réponse.

CORRECTION

(u_n) est la suite définie par $u_0=150$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}8\,u_n+45$

1. $u_1=0{,}8\times150+48=120+45=$ **165**
$u_2=0{,}8\times165+45=132+45=$ **177**

2.a. **L'algorithme 2** est l'algorithme est l'algorithme qui permet de calculer puis d'afficher le plus petit entier naturel tel que $u_n\geqslant220$.
Pour l'algorithme 1 :
On a $150<220$ donc l'algorithme affiche : **0.**

2.b. En utilisant la calculatrice on obtient les résultats suivants (donnés sous la forme d'un tableau et les valeurs approchées de U sont arrondies à 10^{-2} près si nécessaire).

N	U
0	150
1	165
2	177
3	156.6
4	194.28
5	200.42
6	205.34
7	209.27
8	212.42
9	214.93
10	216.84
11	218.56
12	219.65
13	220.88

Donc la valeur affichée est 13.

3. (v_n) est la suite définie par : pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-225$ (donc $u_n=v_n+225$).
3.a. Pour tout entier naturel n :
$v_{n+1}=u_{n+1}-225=0{,}8\,u_n+45-225=0{,}8\times(v_n+225)-180=0{,}8\,v_n+180-180=0{,}8\,v_n$
$v_0=u_0-225=150-225=-75$
(v_n) **est la suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme** v_0 **=-75.**
3.b. Pour tout entier naturel n :
$v_n=v_0\times q^n=-0{,}75\times0{,}8^n$
donc $u_n=225+v_n=225-75\times0{,}8^n$

4. Si on note, N_n le nombre de participants à cette course à pied l'année $2015+n$ alors $N_0=150$ et pour tout naturel n, N_{n+1} est le nombre de participants à cette course à pied l'année $2015+(n+1)$.
L'énoncé précise que 20 des participants ne reviennent pas l'année suivante et que 45 nouveaux participants s'inscrivent à la course.
Donc $N_{n+1}=N_n-\dfrac{20}{100}N_n+45=0{,}8\,N_n+45$.
Conséquence
Pour tout entier naturel n, $N_n=u_n=225-75\times0{,}8^n$ or $-75\times0{,}8^n<0$ donc $N_n<225$.
Conclusion
Ils ne refuseront aucune inscription dans les années à venir.