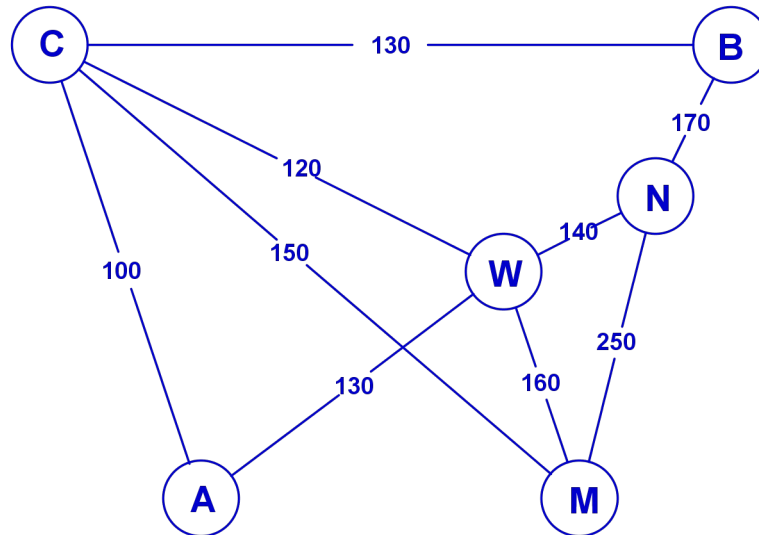


Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

Alexis part en voyage dans l'Est des Etats-Unis. Il souhaite visiter les villes suivantes : Atlanta (A), Boston (B), Chicago (C), Miami (M), New York (N) et Washington (W).

Une compagnie aérienne propose les liaisons suivantes représentées par le graphe ci-dessous :



Les nombres présents sur chacune des branches indique le tarif, en dollars, du vol en avion.

- 1.a. Quelles caractéristiques du graphe permettent d'affirmer qu'il existe un trajet qui permet à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois ?
- 1.b. Donner un exemple d'un tel trajet.
2. Alexis veut relier Boston à Miami.
En utilisant un algorithme, déterminer le trajet le moins cher ainsi que le coût de ce trajet.
- 3.a. Donner la matrice d'adjacence P de ce graphe en classant les sommets dans l'ordre alphabétique.
- 3.b. Alexis souhaite aller d'Atlanta à Boston en utilisant au maximum trois liaisons aériennes.
Combien y-a-t-il de trajets possibles ? Justifier la démarche puis décrire chacun de ces trajets.

CORRECTION

1.a. Alexis peut emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois si et seulement si le graphe admet une chaîne eulérienne.

Théorème d'Euler

Un graphe connexe admet au moins une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

On détermine le degré de chaque sommet et on donne les résultats sous la forme d'un tableau.

| Sommets | A | B | C | M | N | W |
|---------|---|---|---|---|---|---|
| Degrés | 2 | 2 | 4 | 3 | 3 | 4 |

Le graphe admet deux (et deux seulement) sommets: M et N de degré impair.

Conclusion

Alexis peut emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois.

1.b. Pour déterminer une chaîne eulérienne, on doit déterminer une chaîne commençant et finissant aux deux sommets de degré impair.

Exemple

M-N-W-M-C-A-W-C-B-N

2. Pour déterminer le trajet le moins cher reliant Boston à Miami, on utilise l'algorithme de Dijkstra.

Pour remplir le tableau, on place le sommet B en premier et le sommet M en dernier et les autres sommets par ordre alphabétique.

| B | A | C | N | W | M |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| 0(B) | ∞ | 130(B) | 170(B) | ∞ | ∞ |
| | 230(C) | 130(B) | 170(B) | 250(C) | 280(C) |
| | 230(C) | | 170(B) | 250(C) | 280(C) |
| | 230(C) | | | 250(C) | 280(C) |
| | | | | 250(C) | 280(C) |
| | | | | | 280(C) |

On obtient pour trajet le moins cher B-C-M le coût du trajet le moins cher est 280 dollars.

3.a. Les sommets du graphe sont classés dans l'ordre alphabétique.

La matrice d'adjacence P de ce graphe est $P=(p_{ij})$ i :ligne ; j :colonne (i et i sont des entiers naturels tels que $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6$).

S'il existe une arête reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet alors $p_{ij}=1$ sinon $p_{ij}=0$.

On obtient :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.b. Il n'existe pas de liaison aérienne reliant Atlanta à Boston donc $p_{12}=0$.

. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$M = P^2 = (m_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Le cours nous précise que m_{ij} est le nombre de chaînes de longueur 2 reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet

$m_{12} = 1$ donc il n'existe qu'un seul trajet de deux liaisons aériennes reliant A à B.

Ce trajet est : **A-C-B**.

• En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$N = P^3 = (n_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 9 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Le cours nous précise que n_{ij} est le nombre de chaînes de longueur 3 reliant le $i^{\text{ème}}$ sommet au $j^{\text{ème}}$ sommet

$n_{12} = 2$ donc il existe deux trajets de trois liaisons aériennes reliant A à B.

Ces deux trajets sont : **A-W-C-B** et **A-W-N-B**.

• Conclusion

$$p_{12} + m_{12} + n_{12} = 3$$

Il existe donc 3 trajets de longueurs inférieures à 3 reliant Atlanta à Boston ces trois trajets sont :

A-C-B

A-W-C-B

A-W-N-B