Exercice 4 *6 points*

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique situé en annexe. Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0;7].

1. Encadrer par deux entiers consécutifs chacune des solutions de l'équation $f(x)=10$ sur l'intervalle $50;7]$.

2. Donner le maximun de la fonction f sur l'intervalle [0;7] et préciser la valeur en laquelle il est atteint.

3. La valeur de l'intégrale $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel ?

a. $[9;17]$ **b.** $[18;26]$ **c.** $[27;35]$

Partie B

La courbe donnée en annexe est la représentation graphique de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0;7] d'expression : $f(x)=2xe^{-x+3}$.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [0;7], $f'(x)=(-2x+2)e^{-x+3}$.

2.a. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'invalle [0;7] puis en déduire le tableau de variation de la fonction f sur ce même intervalle.
2.b. Calculer le maximun de la fonction f sur l'intervalle [0;7].

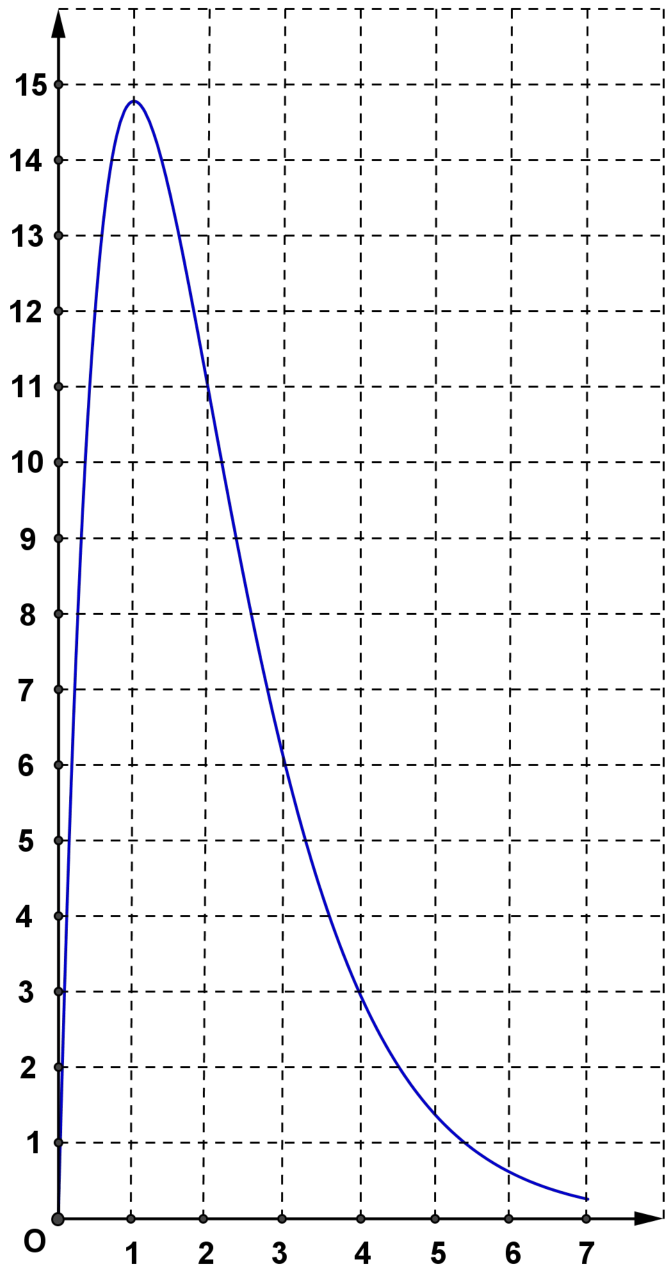
3.a. Justifier que l'équation $f(x)=10$ admet deux solutions sur l'intervalle [0;7] que l'on notera α et β avec $\alpha<\beta$.
3.b. On admet que $\alpha=0{,}36$ à 10^{-2} près.
Donner une valeur approchée de β à 10^{-2} près.

4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle [0;7] par : $F(x)=(-2x-2)e^{-x+3}$
4.a. Justifier que F est une primitive de f sur l'intervalle [0;7].
4.b. Calculer la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation x=1 et x=3, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.

5. La fonction f étudié modélise le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x centaines d'objets (x compris entre 0 et 7).
5.a. Calculer la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près, lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets.
5.b. L'entreprise souhaite que son bénéfice soit supérieur à 10000 euros.
Déterminer le nombre d'objets possibles que l'entreprise devra vendre pour atteindre son objectif.

ANNEXE

N'est pas à vendre avec la copie



CORRECTION

Partie A

1. Les solutions de l »équation $f(x)=10$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $y=10$.

Le premier point d'intersection a une abscisse comprise entre 0 et 1 et le deuxième point d'intersection a une abscisse comprise entre 2 et 3.

2. **Le maximum de la fonction f sur [0;7] est obtenu pour x=1 et est égal à 14,8.**

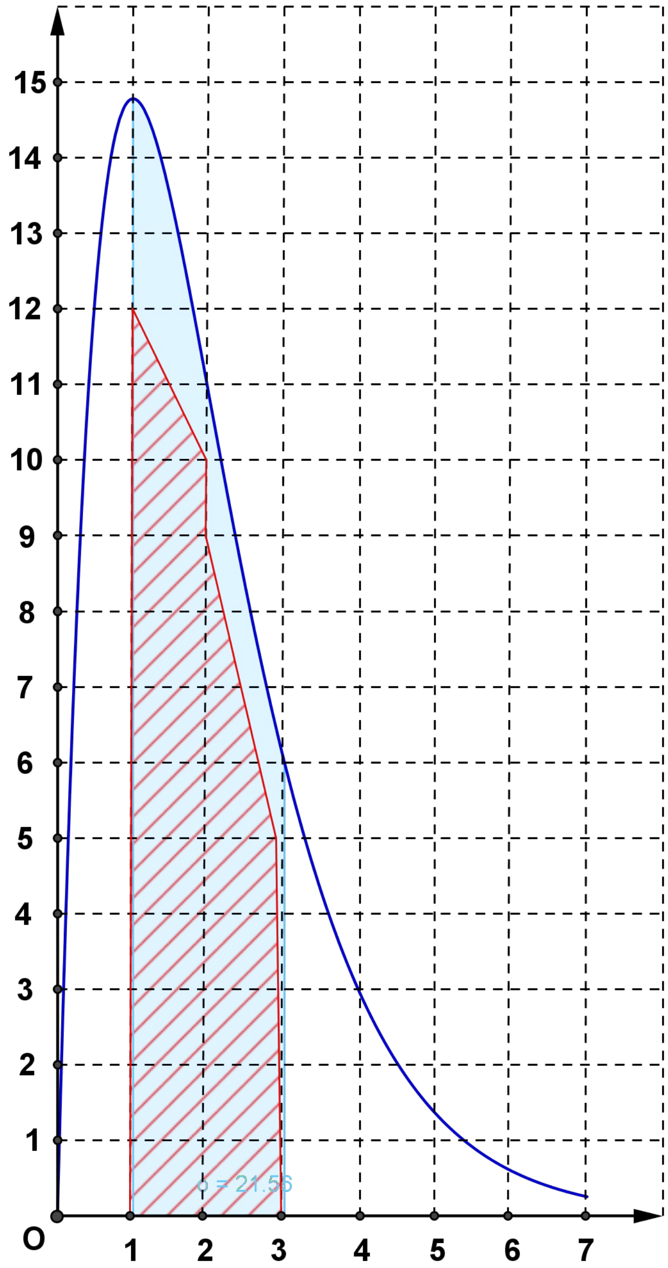
3. **Réponse : b** **[18;26]**

Justifications non demandées

f est une fonction continue et positive sur $[0;7]$ donc $\int_1^3 f(x)\,dx$ est l'aire , en unités d'aire, du domaine plan compris entre les droites d'équation x=1 et x=3 et l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ (domaine plan coloré en bleu sur les figures suivantes).

Pour obtenir un encadrement de l'aire de ce domaine, il suffit de construire un polygone contenu dans le domaine et un polygone contenant le domaine.

Premier polygone contenu dans le domaine :



Le polygone hachuré est constitué :

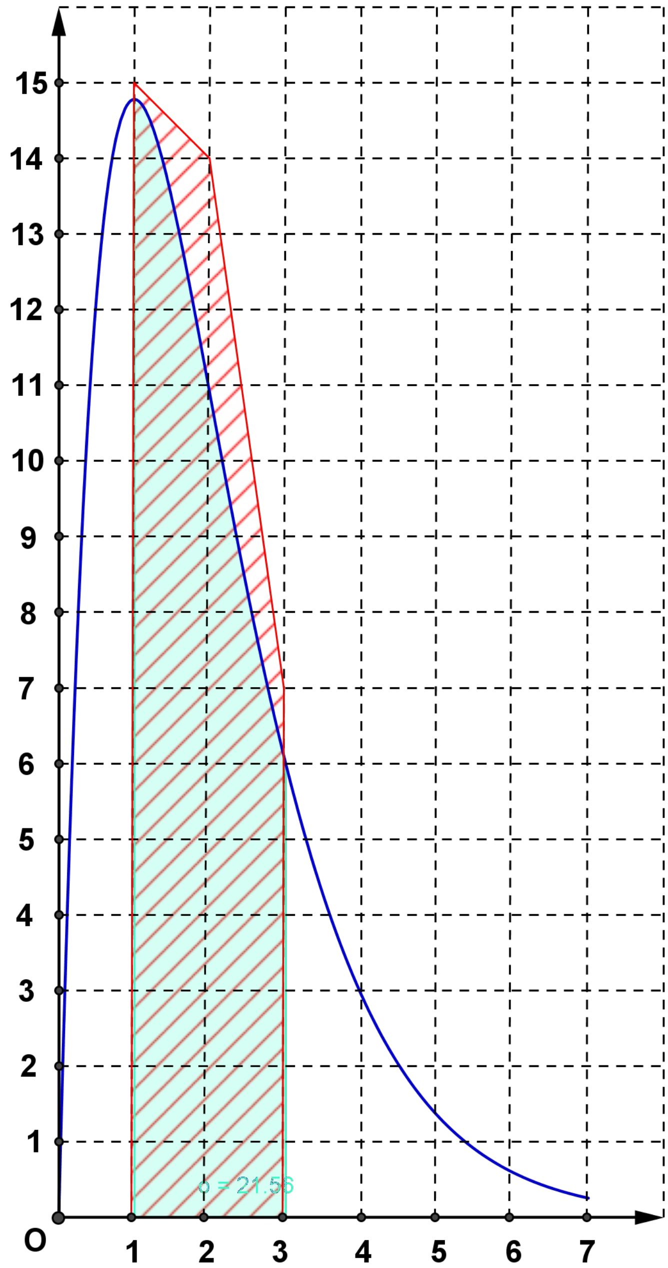
. d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 5 et d'aire $2\times5=10$

- d'un trapèze rectangle de grande base 2 et de petite base 1et de hauteur 4 et d'aire $\frac{(1+2)\times 4}{2}=6$
- d'un carré de côté 1 et d'aire $1\times 1=1$
- d'un triangle rectangle de base 1 et de hauteur 2 et d'aire $\frac{1\times 2}{2}=1$.
- L'aire du polygone hachuré est : **10+6+1+1=18.**

  Remarque

  On peut déterminer d'autres polygones contenus dans la partie de plan coloré en bleu et d'aire légérement supérieure à 18.

Deuxième poltgone contenant le domaine



Le polygone hachuré est constitué :

- d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7 esd'aire $2\times 7=14$
- d'un trapèze rectangle de grande base 2 et de base 1 et de hauteur 7 et d'aire $\frac{(2+1)\times 7}{2}=10{,}5$
- d'un triangle rectangle de base 1 et de hauteur 1 et d'aire $\frac{1\times 1}{2}=0{,}5$
- L'aire du polygone hachuré est : **14+10,5+0,5=25<26.**

Conclusion

L'intégale appartient à l'intervalle [18;26] .

Partie B

1. Pour tout nombre réel de l'intervalle [0;7], $f(x)=2xe^{-x+3}$
$(e^u)'=u'e^u$ donc $(e^{-x+3})'=-e^{-x+3}$
On dérive un produit.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;7], $f'(x)=2\times e^{-x+3}+2x\times(-e^{-x+3})=(-2x+2)e^{-x+3}$

2.a. Pour tout nombre réel de l'intervalle [0;7], $e^{-x+3}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de (-2x+2).
-2x+2=0 ⇔ x=1
-2x+2>0 ⇔ x<1
-2x+2<0 ⇔ x>1
Tableau de variation

x	0		1		7
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	f(1)	↘	f(7)

f(0)=0 et f(7)=0,256 à 10^{-3} près.

2.b. Le maximum de f sur [0;7]est : **f(1)=14,778** à 10^{-3} près.

3.a. f est continue et strictement croissante sur [0;1] à valeurs dans [0;f(1)], 10 appartient à cet intervalle donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution α de l'équation f(x)=10 appartenant à l'intervalle [0;1].
. f est continue est dérivable décroissante sur]1;7] à valeurs dans [f(7):f(1)[, 10 appartient à cet intervalle donc le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution β de l'équation f(x)=10 appartenant à l'intervalle]1;7].
. Conclusion
L'équation f(x)=10 admet deux solutions sur l'intervalle [0;7], α **et** β **de plus** $\alpha<\beta$

3.b. On admet que $\alpha=0{,}36$ à 10^{-2} près.
En utilisant la calculatrice
f(2,1)=10,33 et f(2,2)=9,79 donc $2{,}1<\beta<2{,}2$
f(2,16)=10,007 et f(2,17)=9,95 donc $2{,}16<\beta<2{,}17$
$\beta=2{,}16$ à 10^{-2} près.

4. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;7], $F(x)=(-2x-2)e^{-x+3}$.

4.a. F est une primitive de f sur [0;7] si et seulement si $F'(x)=f(x)$.
$F'(x)=-2e^{-x+3}+(-2x-2)(-e^{-x+3})=(-2+2x+2)e^{-x+3}=2xe^{-x+3}=f(x)$
Conclusion
F une une primitive de f sur [0;7].

4.b. L'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation x=1 et x=3, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ est $\int_1^3 f(x)\,dx$.

$$\int_1^3 f(x)\,dx=F(3)-F(1)=-8e^0-(-4)e^2=4e^2-8$$

5.a. La valeur moyenne du bénéfice, en milliers d'euros, lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets est :

$$\frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\,dx=\frac{1}{2}(4e^2-8)=2e^2-4=10{,}778$$

Soit 10778 euros

5.b. Le bénéfice est supérieur à 10000 euros pour les valeurs de x telles que $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite d'équation y=10, c'est à dire si et seulement si $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$.

$0{,}36\leqslant x\leqslant 2{,}16$ (x en centaines d'objets).

<u>Conclusion</u>

Le bénéfice est supérieur à 10000 si et seulement si l'entreprise vend entre 36 et 216 objets.