Exercice 2 5 points

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.
Le site internet « ledislight.com » spécialisé dans la vente de matériel lumineux vend deux sortes de ruban LED flexibles : un premier modèle dit d'« intérieur » et un deuxième modèle dit d'« extérieur ».
Le site internet dispose d'un grand stock de ces rubans LED.

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les ruban LED d'extérieur expédiés au site internet, 5 % sont défectueux. Le responsable internet désire vérifier la validité de cette affirmation. Dans son stock, il prélève au hasard 400 rubans LED d'extérieur parmi lesquels 25 sont défectueux.
Ce contrôle remet-il en cause l'affirmation du fournisseur ?
Rappel : *lorsque la proportion p d'un caractère dans la population est connue, l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % d'une fréquence d'apparition de ce caractère obtenue sur un échantillon de taille n est donnée par :* $I=\left[p-1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\,p+1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$.

2. Le fournisseur n'a donné aucune information concernant la fiabilité des rubans LED d'intérieur. Le directeur du site souhaite estimer la proportion de rubans LED d'intérieur défectueux. Pour cela, il prélève un échantillon aléatoire de 400 rubans d'intérieur, parmi lesquels 38 sont défectueux.
Donner un intervalle de confiance de cette proportion au seuil de confiance de 95 %.

Partie B

À partir d'une étude statistique réalisée sur de nombreux mois, on peut modéliser le nombre de rubans LED d'intérieur vendus chaque mois par le site à l'aide d'une d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu=2500$ et d'écart-type $\sigma=400$.

1. Quelle est la probabilité que le site vende entre 2100 et 2900 rubans LED d'intérieur en un mois ?

2.a. Trouver, arrondie à l'entier la valeur de a telle que $P(X\leqslant a)=0{,}95$.
2.b. Interpréter la valeur de a obtenue ci-dessus en termes de probabilité de rupture de stock.

Partie C

On admet maintenant que :
. 20 % des rubans LED proposés à la vente sont d'extérieur ;
. 5 % des rubans LED d'extérieur sont défectueux.
On prélève au hasard un ruban LED dans le stock.
On appelle :
. E l'événement : « le ruban est d'extérieur » ;
. D l'événement : « le ruban LED est défectueux ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, que l'on complétera au fur et à mesure.

2. Déterminer la probabilité que le ruban LED soit d'extérieur et défectueux.

3. D'autre part on sait que 6 % de tous les rubans LED sont défectueux.
Calculer et interpréter $P_{\bar{E}}(D)$.

CORRECTION

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les rubans LED d'extérieur expédiés au site internet, 5 % sont défectueux donc la proportion de rubans LED d'extérieur défectueux est $p=0{,}05$.
Le responsable internet, prélève au hasard 400 rubans LED d'extérieur donc n=400.
L'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence dans un échantillon de taille 400 est : $I=\left[0{,}05-1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}05\times0{,}95}{400}}\,;0{,}05+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}05\times0{,}95}{400}}\right]$.
En utilisant la calculatrice, on obtient :
$1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}05\times0{,}95}{400}}=0{,}021$ à 10^{-3} près.
$I=[0{,}05-0{,}021\,;0{,}05+0{,}021]=[0{,}29\,;0{,}71]$.
Il y a 25 rubans défectueux parmi les 400 donc la fréquence observée est :
$f=\frac{25}{400}=0{,}0625=0{,}063$ à 10^{-3} près.
0,063 appartient à l'intervalle I donc **ce contrôle ne remet pas en cause l'affirmation du fournisseur.**

2. La proportion de rubans d'intérieur défectueux dans l'échantillon de 400 rubans est :
$\frac{38}{400}=0{,}095$.
Un intervalle J de confiance de cette proportion au seuil de 95 % est :
$J=\left[0{,}095-\sqrt{\frac{1}{400}}\,;0{,}095+\sqrt{\frac{1}{400}}\right]$ = [0,095-0,05;0,095+0,05] = **[0,045;0,145]**

Partie B

X suit la loi normale de moyenne $\mu=2500$ et d'écart-type $\sigma=400$.

1. En utilisant la calculatrice
$P(2100\leqslant X\leqslant 2900)$ = **0,683** à 10^{-3} près
Remarque
$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0{,}683$

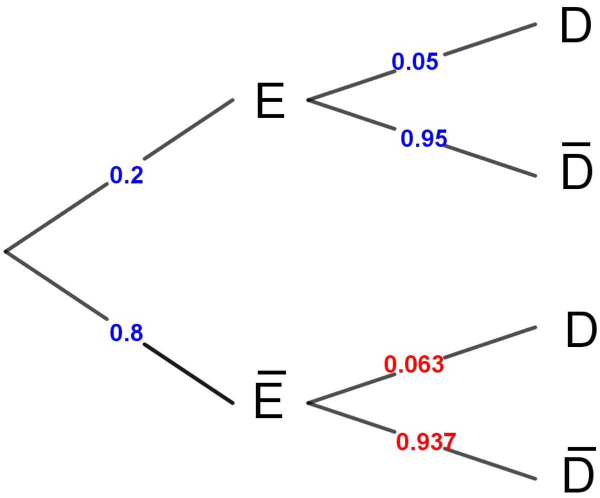
2.a. En utilisant la calculatrice, on obtient la valeur du nombre a (arrondie à l'unité) tel que : $P(X\leqslant a)=0{,}95$
On a : **a=3158** à l'unité près.

2.b. S'il y a 3158 rubans d'intérieur en stock alors la probabilité qu'il n'y ait pas de rupture de stock pendant le mois est supérieure ou égale à 0,95.

Partie C

1. 20 % des rubans LED proposés à la vente sont d'extérieur donc 80 % sont d'intérieur.
Conséquences
$P(E)=0{,}2$ et $P(\bar{B})=0{,}8$

- 5 % des rubans LED d'extérieur sont défectueux donc 95 % ne sont pas défectueux.
Conséquences
$P_E(D)=0{,}05$ et $P_E(\bar{D})=0{,}95$
- On construit l'arbre pondéré (on écrit en bleu les résultats connus à cette question et on écrit en rouge les résultats connus ultérieurement).



2. On nous demande de calculer : $P(E \cap D)$

$P(E \cap D) = P(E) \times P_E(D) = 0{,}2 \times 0{,}05 =$ **0,01.**

3. En utilisant la formule des probabilités totales

$P(D) = P(E \cap D) + P(\bar{E} \cap D)$

On a $P(D) = 0{,}06$ et $P(E \cap D) = 0{,}01$

$P(\bar{E} \cap D) = 0{,}06 - 0{,}01 = 0{,}05 = P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(D)$

Or $P(\bar{E}) = 0{,}8$

$P_{\bar{E}}(D) = \dfrac{0{,}05}{0{,}8} = \dfrac{5}{80} = 0{,}0625 =$ **0,063** à 10^{-3} près.

$P_{\bar{E}}(\bar{D}) = 1 - P_{\bar{E}}(D) = 1 - 0{,}063 =$ **0,937** à 10^{-3} près.

